ステップ

演習 ▶逆三角関数の計算 （講義編 p.24 参照）

次の式の値を求めよ。

(1)　$\tan^{-1}\dfrac{3}{5}+\tan^{-1}\dfrac{1}{4}$　　　　(2)　$\cos^{-1}x+\sin^{-1}x$

ジャンプ 確認 ▶逆三角関数の計算

次の式の値を求めよ。

(1)　$\cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}+\cos^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{5}}$　(2)　$\tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$　$(x\neq 0)$

ステップ

演習 ▶無理関数の微分 （講義編 p.33 参照）

（講義編 p.33 参照）

次の関数を微分せよ。

(1) $\dfrac{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}{x}$　　　(2) $\sqrt[3]{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

ジャンプ

確認 ▶無理関数の微分

次の関数を微分せよ。

(1) $\dfrac{x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

(2) $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}$

ステップ

演習 ▶三角関数の微分 （講義編 p.33、38 参照）

次の関数を微分せよ。

(1) $\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

(2) $\dfrac{\sin x}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}$

ジャンプ 確認 ▶三角関数の微分

次の関数を微分せよ。

(1) $\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

(2) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}$

ステップ

演習 ▶双曲線関数の微分 （講義編 p.26、37 参照）

次の関数を微分せよ。

（1）　$\cosh x$　　　（2）　$\sinh^{-1} x$　　　（3）　$\tanh x$

ジャンプ

確認 ▶双曲線関数の微分

次の関数を微分せよ。

(1) $\sinh x$　　(2) $\cosh^{-1} x$　　(3) $\dfrac{1}{\tanh x}$

ステップ

演習 ▶逆三角関数の微分 （講義編 p.41 参照）

次の関数を微分せよ。

(1)　$x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$　　　(2)　$\tan^{-1}\left(\dfrac{a+\tan x}{1-a\tan x}\right)$

ジャンプ

確認 ▶逆三角関数の微分

次の関数を微分せよ。

(1)　$x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}$　　　　(2)　$\tan^{-1}\left(\dfrac{a\sin x+b\cos x}{a\cos x-b\sin x}\right)$

ステップ

演習 ▶対数微分法 （講義編 p.44 参照）

次の関数を微分せよ。

(1) $\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2(x+2)^3}$ (2) $(\cos x)^{\sin x}$

ジャンプ 確認 ▶対数微分法

次の関数を微分せよ。

(1) $\sqrt{\dfrac{x+1}{(x+2)(x+3)}}$　　(2) $x^{(x^x)}$

ステップ

演習 ▶ n 階導関数 （講義編 p.52 参照）

次の関数の n 階導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$　　　(2) $e^x \cos x$

ジャンプ

確認 ▶ n 階導関数

次の n 階導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$　　(2) $e^{\sqrt{3}x}\sin x$

ステップ

演習 ▶陰関数の微分 （講義編 p.56 参照）

$x^2+xy-2y^2=1$ で定まる関数 $y=y(x)$ について、y'、y'' を x、y を用いて表せ。

ジャンプ 確認 ▶陰関数の微分

$x^3-3xy+y^3=0$ で定まる関数 $y=y(x)$ について、y'、y'' を x、y を用いて表せ。

ステップ

演習 ▶ライプニッツの微分公式 （講義編 p.53 参照）

(1)　$e^{-2x}\sin 3x$ の 3 階導関数を求めよ。

(2)　x^2a^x の n 階導関数を求めよ。

ジャンプ 確認 ▶ライプニッツの微分公式

(1)　$e^{2x}\cos 3x$ の 3 階導関数を求めよ。

(2)　$x^2 \sin ax$ の n 階導関数を求めよ。

ステップ

演習 ▶ライプニッツの微分公式の応用 （講義編 p.53 参照）

$y=\sinh^{-1}x$ のとき、次の(1)～(3)を証明せよ。

(1)　$(1+x^2)y''=-xy'$

(2)　$(1+x^2)y^{(n+2)}+(2n+1)xy^{(n+1)}+n^2y^{(n)}=0$

(3)　$y^{(2m)}(0)=0$、$y^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m-1)^2\cdot\cdots\cdot5^2\cdot3^2\cdot1^2$

ジャンプ

確認 ▶ライプニッツの微分公式の応用

$y=\cos^{-1}x$ のとき、次の(1)〜(3)を証明せよ。

(1)　$(1-x^2)y''=xy'$

(2)　$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$

(3)　$y^{(2m)}(0)=0$、$y^{(2m+1)}(0)=-1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\cdots\cdot(2m-1)^2$　(m は自然数)

ステップ

演習 ▶媒介変数表示の微分 （講義編 p.58 参照）

x、y が次で表されるとき、$\dfrac{dy}{dx}$、$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

(1) $\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$ $(a\neq 0)$

(2) $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$ $(a\neq 0)$

ジャンプ

確認 ▶媒介変数表示の微分

x、y が次で表されるとき、$\dfrac{dy}{dx}$、$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

(1) $\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases}$ $(a \neq 0)$ (2) $\begin{cases} x=\dfrac{at^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{at^3}{1+t^2} \end{cases}$ $(a \neq 0)$

ステップ

演習 ▶グラフを描く （講義編 p.64 参照）

関数 $y=\dfrac{x^2}{x^2+3}$ の増減・凹凸を調べて、グラフの概形を描け。

ジャンプ

確認 ▶グラフを描く

関数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ の増減・凹凸を調べて、グラフの概形を描け。

ステップ

演習 ▶グラフを描く（講義編 p.64 参照）

関数 $y=e^{-\frac{1}{3}x^3}$ の増減・凹凸を調べて、グラフの概形を描け。

ジャンプ

確認 ▶ グラフを描く

関数 $y=x^2e^{-x}$ の増減・凹凸を調べてグラフの概形を描け。

ステップ

演習 ▶連続性・微分可能性 （講義編 p.68 参照）

次の関数が $x=0$ で連続であるか、微分可能であるか調べよ。

(1)　$f(x)=x|x|$

(2)　$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \leqq 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} & (x>0) \end{cases}$

ジャンプ

確認 ▶連続性・微分可能性

次の関数が $x=0$ で連続であるか、微分可能であるか調べよ。ただし、(1) は $f(0)=0$ であり、$x\neq 0$ で次式で表されるものとする。

(1) $f(x)=x\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$　　(2) $f(x)=\dfrac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

ステップ

演習 ▶1 次関数と不定積分 （講義編 p.76 参照）

次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $(2x-1)^{\frac{1}{3}}$　　(2) $\dfrac{1}{4-3x}$　　(3) e^{3x+2}

(4) $\sin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$　　(5) $\dfrac{1}{\cos^2(3x+1)}$　　(6) $\dfrac{1}{9x^2-12x+9}$

ジャンプ 確認 ▶1 次関数と不定積分

次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{(1-3x)^2}$　(2) 2^{4x+1}　(3) $\cos\left(\dfrac{x}{3}+1\right)$

(4) $\dfrac{1}{\sin^2(2x-3)}$　(5) $\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+4x+7}}$　(6) $\dfrac{1}{\sqrt{-4x^2+4x+7}}$

ステップ

演習 ▶置換積分（見抜く）

（講義編 p.76 参照）

次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}$ (2) $\dfrac{1}{(x^2+1)\tan^{-1} x}$ (3) $\tanh x$

(4) $\dfrac{x}{x^4+4}$ (5) $\sin^5 x$ (6) $\dfrac{1}{\sinh x}$

ジャンプ

確認 ▶置換積分（見抜く）

次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$　(2) $\dfrac{1}{x\log x}$　(3) $\dfrac{1}{\tan x}$

(4) $\dfrac{x}{\sqrt{x^4+2}}$　(5) $\cos^5 x$　(6) $\dfrac{1}{\cosh x}$

ステップ

演習 ▶置換積分（文字でおく） （講義編 p.78 参照）

次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+1}$　　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

(3) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

ジャンプ

確認 ▶置換積分（文字でおく）

次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x-1}}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x}\,)}$　　(3) $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

ステップ

演習 ▶部分積分 （講義編 p.81 参照）

次の関数の不定積分を求めよ。

(1)　$x^2 \log x$　　(2)　$x^2 \sin x$

(3)　$\sin^{-1} x$　　(4)　$e^{ax} \cos bx$

ジャンプ 確認 ▶部分積分

次の関数の不定積分を求めよ。

(1)　$\sqrt{x}\log x$　　(2)　$x^2\cos x$

(3)　$\tan^{-1}x$　　(4)　$e^{ax}\sin bx$

ステップ

演習 ▶置換積分(三角関数で置換) (講義編 p.78、83 参照)

次の関数を不定積分せよ。

(1) $\dfrac{1}{(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}}$ $(a>0)$ (2) $\dfrac{1}{x^4(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$ $(a>0)$

ジャンプ 確認 ▶置換積分（三角関数で置換）

次の関数を不定積分せよ。

（1）　$\dfrac{x^4}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$　$(a>0)$　　（2）　$\dfrac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{7}{2}}}$　$(a>0)$

ステップ

演習 ▶置換積分（$\sqrt{2次式}$型） （講義編 p.82、94 参照）

次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{(2x-1)\sqrt{2x^2-4x-1}}$　　(2) $\dfrac{1}{(x+3)\sqrt{2-x-x^2}}$

ジャンプ

確認 ▶置換積分（$\sqrt{2次式}$型）

次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{4x^2+x+1}}$　　(2) $\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{2+x-x^2}}$

ステップ

演 習 ▶有理関数の積分 （講義編 p.89 参照）

次の関数の不定積分を求めよ。

$$\frac{1}{x^3+1}$$

ジャンプ 確認 ▶有理関数の積分

次の関数の不定積分を求めよ。

$$\frac{x}{x^3-1}$$

ステップ

演習 ▶置換積分（三角関数について）（講義編 p.92 参照）

次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$　　(2) $\dfrac{1}{\sin^2 x+9\cos^2 x}$

ジャンプ

確認 ▶置換積分（三角関数について）

次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$　　(2) $\dfrac{\sin^2 x}{1+3\sin^2 x}$

ステップ

演習 ▶積分と漸化式 （講義編 p.97 参照）

(1)　$I_n=\int(\log x)^n dx$ とおく。I_n を I_{n-1} で表せ。I_4 を求めよ。

(2)　$I_n=\int x^n\sqrt{x+a}\,dx$ とおく。I_n を I_{n-1} で表せ。

ジャンプ

確認 ▶積分と漸化式

(1) $I_n=\int(\sin^{-1}x)^n dx$ とおく。$n\geqq 2$ のとき、I_n を I_{n-2} で表せ。

(2) $I_n=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$ とおく。I_{n+1} を I_n で表せ。I_3 を求めよ。

ステップ

演 習 ▶広義積分 （講義編 p.103 参照）

（講義編 p.103 参照）

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^2 dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 e^x + b^2 e^{-x}} dx \quad \begin{pmatrix} a>0 \\ b>0 \end{pmatrix}$　　(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx$

ジャンプ 確認 ▶広義積分

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^4 e^{-x} dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx \quad \begin{pmatrix} a>0 \\ b>0 \end{pmatrix}$

(4) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{|x(1-x)|}} dx$

ステップ

演習 ▶鏡像定積分 （講義編 p.110 参照）

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(1+\tan x)dx$

ジャンプ

確認 ▶鏡像定積分

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+|\cos x|}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos x)dx$

演習 ▶ベータ関数 (講義編 p.114 参照)

$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ とおくとき、次を示せ。

(1)　$B(p, q) = \dfrac{q-1}{p}B(p+1, q-1)$

(2)　p、q が正の整数のとき、$B(p, q) = \dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$

(3)　m、n は自然数、α、$\beta(\alpha < \beta)$ は実数とする。$y = (x-\alpha)^n(\beta-x)^m$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

ジャンプ

確認 ▶ガンマ関数

$\Gamma(s)=\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$　$(s>0)$ とおくとき、次を示せ。

(1)　$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$

(2)　s が正の整数のとき、$\Gamma(s)=(s-1)!$

ステップ

演習 ▶ベータ関数・ガンマ関数 （講義編 p.114 参照）

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\sqrt[3]{\frac{x}{(1+x)^{10}}}dx$ （$t=\dfrac{x}{x+1}$とおく）

(2) $\displaystyle\int_0^{1}(\log x)^n\,dx$ （n は非負整数） （$t=-\log x$ とおく）

ジャンプ 確認 ▶ベータ関数・ガンマ関数

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\cos^5 x\,dx$ （$t=\sin^2 x$ とおく）

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}x^4e^{-x^2}dx$ （$t=x^2$ とおく）

ステップ

演習 ▶面積 （講義編 p.117、128 参照）

次の曲線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。ただし、$a>0$ とする。

(1) $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ (2) $r=a\cos\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

ジャンプ 確認 ▶面積

次の曲線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。ただし、$a>0$ とする。

(1) $\begin{cases} x=a\cos^5 t \\ y=a\sin^5 t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$　(2) $r=a(1+\cos\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$

ステップ

演習 ▶回転体の体積 （講義編 p.122 参照）

次の回転体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=\sin x$、$y=1-\cos x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$で囲まれる部分を x 軸に関して回転

(2)　$y=\sqrt{x}-x$ と x 軸で囲まれる部分を y 軸に関して回転

(3)　$x=a(t-\sin t)$、$y=a(1-\cos t)\,(0\leqq t\leqq 2\pi)$ と x 軸で囲まれる部分を x 軸に関して回転

ジャンプ 確認 ▶回転体の体積

次の回転体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=x(2-x)$ と $y=x^2$ で囲まれる部分を x 軸に関して回転

(2)　$y=x-x^3 (0\leqq x\leqq 1)$ と x 軸で囲まれる部分を y 軸に関して回転

(3)　$x=a\cos^3 t$、$y=a\sin^3 t (0\leqq t\leqq 2\pi)$ で囲まれる部分を x 軸に関して回転。ただし、$a>0$ とする。

ステップ

演習 ▶曲線の長さ （講義編 p.131 参照）

次の曲線の長さ L を求めよ。ただし、$a>0$ とする。

(1) $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

(2) $y=x^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$

(3) $r=a\cos^3\dfrac{\theta}{3}$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi\right)$

ジャンプ

確 認 ▶曲線の長さ

次の曲線の長さ L を求めよ。ただし、$a>0$ とする。

(1) $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

(2) $y=a\cosh\dfrac{x}{a}$ $(0 \leqq x \leqq a)$

(3) $r=a(1+\cos\theta)\,(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$

ステップ

演習 ▶はさみうちの原理 （講義編 p.140 参照）

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{n!}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3^n+5^n)^{\frac{1}{n}}$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$

ジャンプ

確認 ▶はさみうちの原理

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3^{-n}+5^{-n})^{-\frac{1}{n}}$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n(n+1)}$

ステップ

演習 ▶有界単調数列の収束 （講義編 p.143 参照）

$a_1=4$、$a_{n+1}=2^{a_n-3}+\dfrac{3}{2}$を満たす数列$\{a_n\}$で、$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

ジャンプ

確認 ▶有界単調数列の収束

$a_1=\dfrac{1}{2}$、$a_{n+1}=\log_2 a_n+2$ を満たす数列$\{a_n\}$で、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

ステップ

演習 ▶無限級数の和 （講義編 p.144 参照）

次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

ジャンプ 確認 ▶無限級数の和

次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ステップ

演習 ▶無限級数の収束・発散 （講義編 p.151 参照）

次の無限級数の収束・発散を判定せよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n}{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$

ジャンプ

確認 ▶無限級数の収束・発散

次の無限級数の収束・発散を判定せよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{3\cdot6\cdot9\cdot\cdots\cdot3n}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$

ステップ

演習 ▶絶対収束・条件収束 （講義編 p.153 参照）

次の無限級数は収束か発散か、収束ならば絶対収束か条件収束か。

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\log n}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

ジャンプ

確認 ▶絶対収束・条件収束

次の無限級数は収束か発散か、収束ならば絶対収束か条件収束か。

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{\log n}{n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{\log n}{n^{2}}$

ステップ

演習 ▶収束半径 （講義編 p.155 参照）

次の整級数の収束半径 R を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n} x^n$　　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2n)^n x^{n^2}$

ジャンプ

確 認 ▶収束半径

次の整級数の収束半径 R を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)2^n}\cdot x^n$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}x^n$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{2n+1}x^{n^2}$

ステップ

演習 ▶関数の極限 （講義編 p.137 参照）

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{3x^2-5x+2}{2x^2-x-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+2}{2x^2-x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+6x}-x)$

ジャンプ

確 認 ▶関数の極限

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{2x^2-3x-2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-8}{2x^2-3x-2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+x})$

ステップ

演習 ▶関数の極限 （講義編 p.158 参照）

（講義編 p.158 参照）

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{\sin^4 x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x-\sin^2 x}{x^4}$

ジャンプ

確認 ▶関数の極限

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos(1-\sin x)}{\sin^4(\cos x)}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^3 x-\sin^3 x}{x^5}$

演習 ▶ロピタルの定理 （講義編 p.161 参照）

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos(ax)}{\log\cos(bx)}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)$

ジャンプ

確認 ▶ロピタルの定理

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan^2 x)(\log\sin x)$

ステップ

演習 ▶ロピタルの定理 （講義編 p.161 参照）

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\log(1+x)}{x^2}\right)$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

ジャンプ

確認 ▶ロピタルの定理

次の極限値を求めよ。

（1）　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)$　（2）　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$（$a$、$b$、$c$ は正）

ステップ

演習 ▶マクロ－リン展開 （講義編 p.176 参照）

次の関数の n 次導関数を計算し、マクローリン展開せよ。また、収束半径 R を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$　　　　(2) $\cosh x$

ジャンプ

確認 ▶マクローリン展開

次の関数の n 次導関数を計算し、マクローリン展開せよ。また、収束半径 R を求めよ。

(1)　a^x　　(2)　$\log(1+3x+2x^2)$

ステップ

演習 ▶マクローリン展開 （講義編 p.176 参照）

次の関数を p.179 の公式を用いて、マクローリン展開せよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　　(2) $\sin^{-1} x$

ジャンプ 確認 ▶マクローリン展開

次の関数を p.179 の公式を用いて、マクローリン展開せよ。

(1) $\sin^3 x$　　(2) $\dfrac{x^2}{1+x^2}$　　(3) $\tan^{-1} x$

演習 ▶マクロ―リン展開を利用した近似式 (講義編 p.176 参照)

p.179 の公式を用いて、x の絶対値が小さいときの次の近似式を示せ。

(1) $\sqrt{1-x+x^2} \fallingdotseq 1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{3}{16}x^3$

(2) $\tan x \fallingdotseq x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5$

ジャンプ

確認 ▶マクローリン展開を利用した近似式

p.179 の公式を用いて、x の絶対値が小さいときの近似式を示せ。

(1)　$\log(1+\sin x) \fallingdotseq x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3$

(2)　$(1+x)^{\frac{1}{x}} \fallingdotseq e-\dfrac{e}{2}x+\dfrac{11e}{24}x^2$

ステップ

演習 ▶偏導関数 （講義編 p.187 参照）

次の関数の偏導関数 f_x、f_y を求めよ。

（1）$f(x, y)=x^2\tan^{-1}\dfrac{y}{x}-y^2\tan^{-1}\dfrac{x}{y}$ （2）$f(x, y)=\log_y x$

ジャンプ

確認 ▶偏導関数

次の関数の偏導関数f_x、f_y を求めよ。

(1)　$f(x, y) = x\sin^{-1}\dfrac{y}{x}$　　(2)　$f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

ステップ

演習 ▶全微分と接平面 （講義編 p.191、204 参照）

(1)　曲面 $S : z = \cos(x+2y)$ の $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right)$ での全微分、接平面の式を求めよ。

(2)　曲面 $S : xy+2yz+3zx=1$ の $(1, -1, 2)$ での全微分、接平面の式を求めよ。

ジャンプ

確認 ▶全微分と接平面

(1)　曲面 $S: z=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ の $(1, \sqrt{3})$ での全微分、接平面の式を求めよ。

(2)　曲面 $S: x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}=1$ の $\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, 1, -1\right)$ での全微分、接平面の式を求めよ。

ステップ

演習 ▶全微分の変数変換 （講義編 p.199 参照）

（講義編 p.199 参照）

全微分可能な関数 $z=e^x \cosh y$ について、

(1)　$x=\cos\theta$、$y=\sin\theta$ のとき、$\dfrac{dz}{d\theta}$ を求めよ。

(2)　$x=u+v$、$y=uv$ のとき、$\dfrac{\partial z}{\partial u}$、$\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ。

ジャンプ 確認 ▶全微分の変数変換

全微分可能な関数 $z=x^y$ について、

(1)　$x=\cosh t$、$y=\sinh t$ のとき、$\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ。

(2)　$x=2u+v$、$y=uv^2$ のとき、$\dfrac{\partial z}{\partial u}$、$\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ。

ステップ

演習 ▶2 階の偏導関数 (講義編 p.205 参照)

関数 $f(x, y) = \sin^{-1}\dfrac{y}{x}\,(y>0)$ の 2 階の偏導関数 f_{xx}、f_{xy}、f_{yx}、f_{yy} を求めよ。

ジャンプ

確 認 ▶2 階の偏導関数

関数 $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ の 2 階の偏導関数 f_{xx}、f_{xy}、f_{yx}、f_{yy} をそれぞれ求めよ。

ステップ

演習 ▶2変数関数の極値 (講義編 p.212 参照)

次の関数の極値を求めよ。

$$f(x, y) = x^4 + 6x^2 - 8xy + 2y^2$$

ジャンプ

確認 ▶2 変数関数の極値

次の関数の極値を求めよ。

$$f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$$

ステップ

演習 ▶ラグランジュの未定乗数法 （講義編 p.214 参照）

x、y が $x^2+xy+y^2=1$ を満たしながら動くとき、$2x^2+y^2$ の極値の候補を求めよ。

ジャンプ 確認 ▶ラグランジュの未定乗数法

x、y が、$x^2+y^2=1$ を満たしながら動くとき、$2x^2-xy+y^2$ の極値の候補を求めよ。

ステップ

演習 ▶ラグランジュの未定乗数法 (講義編 p.218 参照)

x、y、z が $x+y+z=6$(x, y, z は正)を満たしながら動くとき、xy^2z^3 の極値の候補を求めよ。

ジャンプ

確認 ▶ラグランジュの未定乗数法

x、y、z が$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{4}=1$ を満たしながら動くとき、xyz の極値の候補を求めよ。

ステップ

演習 ▶2変数関数の連続性 （講義編 p.221 参照）

次の関数は$(0, 0)$で連続であるか調べよ。

(1)

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x, y)\neq(0, 0)) \\ 0 & ((x, y)=(0, 0)) \end{cases}$$

(2)

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & ((x, y)\neq(0, 0)) \\ 0 & ((x, y)=(0, 0)) \end{cases}$$

ジャンプ

確認 ▶2 変数関数の連続性

次の関数は$(0, 0)$で連続であるか調べよ。

(1)

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ((x, y)\neq(0, 0)) \\ 0 & ((x, y)=(0, 0)) \end{cases}$$

(2)

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x, y)\neq(0, 0)) \\ 0 & ((x, y)=(0, 0)) \end{cases}$$

ステップ

演習 ▶累次積分 （講義編 p.224、226 参照）

次の累次積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2x-y)\,dxdy$　(2) $\displaystyle\int_1^2\int_1^{y^2}\frac{y}{x^2}\,dxdy$

ジャンプ

確認 ▶累次積分

次の累次積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^2(2x-y)}dxdy$ (2) $\displaystyle\int_1^2\int_y^{y^2}\frac{1}{x+y}dxdy$

ステップ

演習 ▶重積分 （講義編 p.233 参照）

次の重積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_D \sqrt{4x^2-y^2}\,dxdy \qquad D:0\leqq y\leqq x\leqq 1$

(2) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy \qquad D:x^2+y^2\leqq x,\ y\geqq 0$

ジャンプ

確 認 ▶重積分

次の重積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_D \sqrt{3x^2+y^2}\,dydx$ 　　$D:0\leqq y\leqq x\leqq 1$

(2) $\displaystyle\iint_D (x+2y)\,dxdy$ 　　$D:x^2+y^2\leqq 1,\ y\geqq 0,\ x\geqq 0$

ステップ

演習 ▶積分順序の変更 （講義編 p.239 参照）

次の累次積分の順序を変更せよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2\int_y^{2y} f(x,y)\,dxdy$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dxdy$

(3) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{1-x^2}}^{3-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dydx$

ジャンプ

確認 ▶積分順序の変更

次の累次積分の順序を変更せよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{2+y} f(x,y)\,dxdy$　　(2) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{\frac{x^2}{4}}^{3-x} f(x,y)\,dydx$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dydx$

ステップ

演習 ▶累次積分の工夫 （講義編 p.240 参照）

次の累次積分を工夫して計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos y}{y}\,dydx$　　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_1^{\frac{1}{y}}xe^{xy}\,dxdy$

ジャンプ

確認 ▶累次積分の工夫

次の累次積分を工夫をして計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_x^{\frac{\pi}{4}}\tan(y^2)\,dydx$ (2) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}\,dxdy$

ステップ

演習 ▶重積分の変数変換 （講義編 p.245 参照）

次の重積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{a^2-x^2-y^2}{a^2+x^2+y^2}}\,dxdy \qquad D : x^2+y^2 \leqq a^2,\ y \geqq 0$ （a は正の定数）

(2) $\displaystyle\iint_D y^2 dxdy \qquad D : x^2+y^2 \leqq ax$ （a は正の定数）

ジャンプ

確認 ▶重積分の変数変換

次の重積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy \qquad D: a^2 \leqq x^2+y^2 \leqq 4a^2,\ 0 \leqq x \leqq a$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \qquad D: x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq a^2,\ x^2+y^2 \geqq ax$

ステップ

演習 ▶重積分の変数変換 （講義編 p.245、255 参照）

次の重積分を計算せよ。

(1) $\iint_D (2x+3y)e^x dxdy \qquad D: 0 \leqq 2x+3y \leqq 1,\ -1 \leqq 3x+5y \leqq 1$

(2) $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x}} dxdy \qquad D: \sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}} \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$

ジャンプ

確認 ▶重積分の変数変換

次の重積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_D (x-2y)\sin(2x+y)\,dxdy \qquad D:\begin{cases}0\leqq x-2y\leqq\dfrac{\pi}{2}\\[2mm] 0\leqq 2x+y\leqq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy^2\,dxdy \qquad D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$

ステップ

演習 ▶体積（立体の交わり）（講義編 p.245 参照）

球 $x^2+y^2+z^2 \leqq a^2$ と直円柱 $x^2+y^2 \leqq ax$ の交わりの部分の体積 V を求めよ。

ジャンプ

確認 ▶体積（立体の交わり）

直円柱 $x^2+y^2 \leqq a^2,\ y^2+z^2 \leqq a^2,\ z^2+x^2 \leqq a^2$ の共通部分の体積 V を求めよ。

ステップ

演 習 ▶広義積分 （講義編 p.258 参照）

次の重積分を広義積分で計算せよ。

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dxdy \qquad D : 0 \leqq y \leqq x \leqq 1$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x-y}}\,dxdy \qquad D : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1$

ジャンプ 確認 ▶広義積分

次の重積分を広義積分で計算せよ。

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy \qquad D:0\leqq y\leqq x\leqq 1$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\,dxdy \qquad D:0\leqq y\leqq x\leqq 1$

ステップ

演 習 ▶無限積分 （講義編 p.260 参照）

次の重積分を無限積分で計算せよ。

(1) $\displaystyle\iint_D e^{-x-y}\,dxdy \qquad D : 0 \leqq x,\ 0 \leqq y$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x(x^2+y^2)}\,dxdy \qquad D : 1 \leqq x,\ 0 \leqq y \leqq x$

ジャンプ 確認 ▶無限積分

次の重積分を無限積分で計算せよ。

(1) $\displaystyle\iint_D xye^{-x^2-y^2}\,dxdy \qquad D：0 \leqq x,\ 0 \leqq y$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^4}\,dxdy \qquad D：1 \leqq y,\ 0 \leqq x \leqq y^2$

ステップ

演習 ▶3 重積分 （講義編 p.266 参照）

次の 3 重積分を計算せよ

(1) $\iiint_D e^{x+y+z}dxdydz$ $\quad D：x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x+y+z \leqq 1$

(2) $\iiint_D xyzdxdydz$ $\quad D：0 \leqq x \leqq y \leqq z \leqq 1$

ジャンプ

確認 ▶3 重積分

次の 3 重積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\iiint_D \sin(x+y+z)\,dxdydz \quad D: x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x+y+z \leqq \frac{\pi}{2}$

(2) $\displaystyle\iiint_D \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\,dxdydz \quad D: 0 \leqq z \leqq y \leqq x \leqq 1$

ステップ

演習 ▶3 重積分と体積 (講義編 p.268 参照)

xyz 空間中の領域 D：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$

の体積を求めよ。

ジャンプ

確 認 ▶3 重積分と体積

xyz 空間中の領域 D：$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leqq \sqrt{a}$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ の体積を求めよ。

ステップ

演習 ▶曲面積 （講義編 p.273 参照）

(1)　曲面 $z=xy$ の $x^2+y^2 \leqq a^2 (a>0)$ にある部分の面積 S を求めよ。

(2)　曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ の $x^2+y^2 \leqq ax (a>0)$ にある部分の面積 S を求めよ。

ジャンプ 確認 ▶曲面積

(1)　曲面 $z=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ の $x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x^2+y^2\leqq 1$ を満たす部分の面積 S を求めよ。

(2)　曲面 $z^2=4ax$ の $x^2+y^2\leqq ax\ (a>0)$ にある部分の面積 S を求めよ。

演習 ▶関数の極限と連続 （講義編 p.281、287、295 参照）

(1)　$\lim_{x \to 8} \log_2 x = 3$ を $\varepsilon - \delta$ 論法で示せ。

(2)　$f(x) = x^3 + 2x$ が $x = 1$ で連続であることを $\varepsilon - \delta$ 論法で示せ。

ジャンプ

確 認 ▶関数の極限と連続

(1) $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を $\varepsilon-\delta$ 論法で示せ。

(2) $f(x)=x^2+2x$ が $x=1$ で連続であることを $\varepsilon-\delta$ 論法で示せ。

ステップ 演習 ▶数列の極限 （講義編 p.293 参照）

(1)　$a_n=\dfrac{n^3-2}{2n^3+1}$ のとき、$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{1}{2}$ を $\varepsilon-N$ 論法で示せ。

(2)　$a_n=n(\sqrt{n^2+1}-n)$ のとき、$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{1}{2}$ を $\varepsilon-N$ 論法で示せ。

ジャンプ **確認** ▶数列の極限

(1)　$a_n=\dfrac{2^n+1}{3\cdot2^n-1}$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{3}$ を $\varepsilon-N$ 論法で示せ。

(2)　$a_n=\sqrt{n^2+2n}-n$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$ を $\varepsilon-N$ 論法で示せ。

ステップ

演 習 ▶ $\varepsilon-N$ 論法の応用 （講義編 p.297、299 参照）

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ のとき、次が成り立つことを $\varepsilon-N$ 論法で示せ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=\alpha$$

ジャンプ

確認 ▶ $\varepsilon - N$ 論法の応用

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき、次が成り立つこと示せ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$ (2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$