複素数の三角関数と実関数の三角関数が異なる点（講義編 p.103 の補足）

問題　次の式を満たす複素数 z を求めよ。

（1）　$\cos z=2$　　　　　（2）　$\sin z=3$

$\cos z$、$\sin z$ を定義式で書き換えて e^{iz} を求める。z を表すには複素数の対数関数を用いる。

（1）　定理 2.08 を用いて、

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=2 \qquad (e^{iz})^2-4e^{iz}+1=0$$

e^{iz} に関する 2 次方程式を解いて、

$$e^{iz}=2\pm\sqrt{3}=(2\pm\sqrt{3})e^{2n\pi i} \quad （n \text{ は整数}）$$

複素数の対数を取って、

$$iz=\log(2+\sqrt{3})+2n\pi i、\log(2-\sqrt{3})+2n\pi i$$

$$=\pm\log(2+\sqrt{3})+2n\pi i \qquad [\log(2-\sqrt{3})=-\log(2+\sqrt{3})]$$

$$z=\pm i\log(2+\sqrt{3})+2n\pi \quad （n \text{ は整数}）$$

（実関数の対数）

$$=\pm i\log(2+\sqrt{3})$$

（複素数の対数）

（2）　定理 2.08 を用いて、

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=3 \qquad (e^{iz})^2-6ie^{iz}-1=0$$

e^{iz} に関する 2 次方程式を解いて、

$$e^{iz}=(3\pm2\sqrt{2})i=(3\pm2\sqrt{2})ie^{2n\pi i} \quad （n \text{ は整数}）$$

複素数の対数を取って、

$$iz=\log(3+2\sqrt{2})+\frac{\pi}{2}i+2n\pi i、\log(3-2\sqrt{2})+\frac{\pi}{2}i+2n\pi i$$

$$=\pm\log(3+2\sqrt{2})+\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi i$$

$$z=\pm i\log(3+2\sqrt{2})+\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi \quad （n \text{ は整数}）$$

(実関数の対数)

$$= \pm i \log(i(3+2\sqrt{2}))$$

(複素数の対数)