$f(z)=z^n$ の正則性（講義編 p.137 の補足）

(2)　$f(z)=z^n=(x+iy)^n=\sum_{l=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_l x^{n-l}(iy)^l$

[l を奇偶で分けるとちょうど実部と虚部に分けることができて]

$$=\sum_k(-1)^k{}_n\mathrm{C}_{2k}x^{n-2k}y^{2k}+i\left(\sum_k(-1)^k{}_n\mathrm{C}_{2k+1}x^{n-2k-1}y^{2k+1}\right)$$

[n が奇数のとき，k は 0 から $\frac{n-1}{2}$ まで動く

n が偶数のとき，k は 0 から $\frac{n}{2}$ まで動く]

$$u(x,\ y)=\sum_k(-1)^k{}_n\mathrm{C}_{2k}x^{n-2k}y^{2k}、$$
$$v(x,\ y)=\sum_k(-1)^k{}_n\mathrm{C}_{2k+1}x^{n-2k-1}y^{2k+1}$$

とおくと、

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_k(-1)^k(n-2k){}_n\mathrm{C}_{2k}x^{n-2k-1}y^{2k}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\sum_k(-1)^k(2k+1){}_n\mathrm{C}_{2k+1}x^{n-2k-1}y^{2k}$$

で、

$$(n-2k){}_n\mathrm{C}_{2k}=(n-2k){}_n\mathrm{C}_{n-2k}$$ 　　$k{}_n\mathrm{C}_k=n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ を用いる

$$=n{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2k-1}=n{}_{n-1}\mathrm{C}_{2k}=(2k+1){}_n\mathrm{C}_{2k+1}$$

より、$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$　　同様に、$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$

　これらは連続で、コーシー・リーマンの関係式を満たすので、$f(z)=z^n$ は正則関数です。