べき級数の各項微分（講義編 p.141 の補足）

定理　べき級数の各項微分

$f(z)$ が収束半径 R のべき級数で、

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

と表されるとき、$f(z)$ の微分 $f'(z)$ は、各項を微分したべき級数、

$$f'(z)=a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}+\cdots$$

で表される。$f'(z)$ のべき級数の収束半径も R である。

$f(z)$ がべき級数で表されることを条件として、「微分の定義式から計算した $f'(z)$」と「$f(z)$ のべき級数を項別に微分した式」が一致すること（項別微分可能）を示す証明法として 2 つに言及します。

（ア）　直接計算する方法

（イ）　一般論から導く方法

①は難しい用語は出てきませんから、式さえ追いかければ証明を理解できます。②はワイエルシュトラスの定理と呼ばれる一様収束する関数列に関する定理を用います。こちらは詳しく述べませんので、深く知りたい人はキーワードを頼りに自分で調べてください。

[（ア）　直接計算する方法]

示すべき式は、

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=f'(z)$$

で、$f(z)$、$f'(z)$ をべき級数に置き換えた式です。そこで、$h\to 0$ のとき、

$$\left|\frac{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+h)^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n}{h}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}\right|$$

が 0 に収束することを示します。初めにパーツを準備します。

$$\left|\frac{(z+h)^n-z^n}{h}-nz^{n-1}\right|=\left|\sum_{k=2}^{n}{}_n\mathrm{C}_k z^{n-k}h^{k-1}\right|$$

$$\leqq\sum_{k=2}^{n}{}_n\mathrm{C}_k|z|^{n-k}|h|^{k-1}$$

$$=\frac{(|z|+|h|)^n-|z|^n}{|h|}-n|z|^{n-1}$$

これを用いると、

$$\left|\frac{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+h)^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n}{h}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}\right|$$

$$=\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{(z+h)^n-z^n}{h}-nz^{n-1}\right)\right|$$

(絶対収束しているので項を入れ替えてもよい)

$$\leqq\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\left|\frac{(z+h)^n-z^n}{h}-nz^{n-1}\right|$$

$$\leqq\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\left(\frac{(|z|+|h|)^n-|z|^n}{|h|}-n|z|^{n-1}\right)\quad\cdots①$$

$|z|<R$ なので、$|z|<R'<R$ となる R' をとります。ここで、$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}<\frac{1}{R'}$ ですから、ある数 N があって、n が N 以上では、

$$|a_n|\leqq\frac{1}{R'^n}\qquad(n\geqq N)$$

が成り立ちます。これを用いて、

$$①\leqq\sum_{n=1}^{N-1}|a_n|\underbrace{\left(\frac{(|z|+|h|)^n-|z|^n}{|h|}-n|z|^{n-1}\right)}+\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{R'^n}\left(\frac{(|z|+|h|)^n-|z|^n}{|h|}-n|z|^{n-1}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{N-1}\left(|a_n|-\frac{1}{R'^n}\right)\left(\frac{(|z|+|h|)^n-|z|^n}{|h|}-n|z|^{n-1}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{R'^n}\left(\frac{(|z|+|h|)^n-|z|^n}{|h|}-n|z|^{n-1}\right)\quad\cdots②$$

ここで第1項は有限個の和であり、$h\to 0$ のとき波線部は微分の公式より0に収束しますから、第1項全体で0に収束します。

②の第2項が0に収束することを示すために、実数に関する無限和の式

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots\qquad(|x|<1)\quad\cdots③$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}= \quad 1+2x+\cdots+kx^{k-1}+\cdots \qquad (|x|<1) \quad \cdots④$$

を用います。なお、この 2 式は、有限和

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+\cdots+nx^{n-1}+\frac{(n+1)x^n-nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

を、$|x|<1$ のときに $n\to\infty$ として導いた式です。④は③を微分して求めた式ではないという立場です。これから示すことを使っては反則ですから。②の第 2 項に③、④を用いてまとめます。

$g(x)=\dfrac{1}{1-x}$、$w(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ とおきます。$\dfrac{|z|}{R'}<1$ なので、h を

$\dfrac{|z|+|h|}{R'}<1$ を満たすように取ることができ、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{R'^n}\left(\frac{(|z|+|h|)^n-|z|^n}{|h|}-n|z|^{n-1}\right)$$

$$=\frac{g\left(\dfrac{|z|+|h|}{R'}\right)-g\left(\dfrac{|z|}{R'}\right)}{|h|}-\frac{1}{R'}w\left(\frac{|z|}{R'}\right)$$

$$=\frac{1}{R'}\left(\frac{g\left(\dfrac{|z|+|h|}{R'}\right)-g\left(\dfrac{|z|}{R'}\right)}{\dfrac{|h|}{R'}}-w\left(\frac{|z|}{R'}\right)\right) \quad \cdots⑤$$

$g'(x)=w(x)$ ですから、$h\to 0$ のとき、⑤の右辺、すなわち②の第 2 項は 0 に収束します。

[(イ)　べき級数の一様収束性を用いる方法]

本書ではべき級数の収束円内での収束を単に収束としか言及しませんでしたが、この収束は単なる収束よりも強い収束である絶対収束です。さらに、収束円内で一様収束しています。一様収束とは領域全体で関数が近づいていくことを条件とする、各点での収束よりも強い条件の収束です。

定理　べき級数の一様収束性

関数 $f(z)$ が $D(0,\ R)$ 内で、

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

とべき級数で表されている。このとき、$f_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ とおくと、$D(0,\ R)$ で関数列 $\{f_n(z)\}$ は $f(z)$ に一様収束している。

領域内で一様収束する関数列 $\{f_n(z)\}$ に関して、次の定理があります。

定理　（ワイエルシュトラスの定理）

領域 D で定義された正則な関数の列 $\{f_n(z)\}$ があり、領域 D で $f_n(z)$ が $f(z)$ に一様収束するとき、$f(z)$ も正則となり次が成り立つ。

$$f'(z)=\lim_{n\to\infty}f'_n(z)$$

この定理の証明は他書をご覧ください。この定理を用いると、次のようにべき級数を項別微分してよいことがわかります。

$f(z)$ が円板 $D(0,\ R)$ の内部で、べき級数により

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

と表されているものとします。

$f_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ とおくと、$f(z)$ がべき級数で表されているので、$D(0,\ R)$ で関数列 $\{f_n(z)\}$ は $f(z)$ に一様収束しています。この定理により、$D(0,\ R)$ 上で

$$f'(z)=\lim_{n\to\infty}f'_n(z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}ka_kz^{k-1}=a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}+\cdots$$

となります。べき級数を項別微分してよいことがわかりました。