クイズ解答

第 1 章

1. (1) $1/(6\times7)=1/42$　(2) $4\times3\times2\times2=48$　(3) $4\times3\times2/1=24$

2. (1) $3!/0!=3\times2=6$　(2) $5!/3!=5\times4=20$　(3) $7!/4!=7\times6\times5=210$

3. ${}_8P_5 = 8!/3! =8\times7\times6\times5\times4=6720$

4. (1) $7!/(4!\times3!)=35$　(2) $7!/(7!\times0!)=1$　(3) $7!/(5!\times2!)=21$

5. ${}_{20}C_5=20!/(15!\times5!)=15504$（通り）

6. ${}_6C_2\times{}_7C_3 =6!/(4!\times2!)\times7!/(4!\times3!)=525$（通り）

7. 目の和が 10 となる事象は要素が{4, 6}、{5, 5}、{6, 4}の 3 個あります。同様に、目の和が 11 となる事象の要素は{5, 6}、{6, 5}の 2 個、目の和が 12 となる事象の要素は{6, 6}の 1 個あります。したがって $P(C)=3/36+2/36+1/36=6/36=1/6$ となります。

8. 1 回のトスで表 Head (H)または裏 Tail (T)が出るので、4 回のトスでは $2^4=16$ 個の要素（根元事象）があります。その中で表が 1 回となる事象の要素は{H, T, T,

T}、{T, H, T, T}、{T, T, H, T}、{T, T, T, H}の 4 つあるので、4/16=1/4 となります。

（別解）後述する二項分布を使うと、${}_4C_1(1/2)^1(1-1/2)^{4-1}=4\times(1/2)^4=1/4$

9. ${}_{19}C_2\times{}_{21}C_0/{}_{40}C_2=171/780$

10. クイズ 8 で解説したように、1 回のトスで表 Head (H)または裏 Tail (T)が出るので、4 回のトスでは 24=16 個の要素（根元事象）があります。余事象は「1 回も表が出ない、つまりすべて裏が出る」となるので、その要素は{T, T, T, T}のみです。従って求める確率は 1-(1/16)=15/16 となります。

（別解）二項分布を使うと、$1-{}_4C_0(1/2)^0(1-1/2)^{4-0}=1-(1/2)^4=15/16$

11. (1) それぞれのマークで数字が 3 以下であるカードは{1, 2, 3}の 3 枚あるので、3×4/52=3/13

(2) クラブでその数字が 3 以下であるカードは{1, 2, 3}の 3 枚あるので、3/52

(3) クラブのカードは 13 枚あるので、加法定理に従い、13/52+3/13-3/52=22/52=11/26

12. (1) $0.002^3=(2\times10^{-3})^3=8\times10^{-9}$

(2) 余事象「規格外品が 0 個である、つまりすべてが規格品である」を考えると、$1-(1-0.002)^3=1-0.998^3\fallingdotseq1-0.994=0.006$

13. 余事象は「すべて正解する」となり、1 題に正解する確率は 1/3 ですから、$1-(1/3)^4=80/81$ となります。

14. その学生が数学 M で合格した確率は $P(M)=0.7$、英語 E で合格した確率は $P(E)=0.8$、両方で合格した確率は $P(M\cap E)=0.6$ と表せます。

(1) $P(M|E)= P(M\cap E)/P(E)=0.6/0.8=0.75$

(2) $P(M\cup E)=P(M)+P(E)-P(M\cap E)=0.7+0.8-0.6=0.9$

15. $A=\{$最初の目が 5$\}$、$B=\{$目の和が 9 以上$\}$とおくと、求める確率は $P(B|A)$と書けます。各要素は $A=\{(5,1),(5,2),\cdots,(5,6)\}$、$A\cap B=\{(5,4),(5,5),(5,6)\}$ より $n(A)=6$, $n(A\cap B)=3$ ですから、$P(B|A)=3/6=1/2$ となります。

16. (1) $P(A\cap B)= P(A)+P(B)-P(A\cup B)=1/2+1/3-2/3=1/6$

$P(A|B)= P(A\cap B) / P(B)= (1/6)/(1/3)=1/2$

$P(B|A)= P(A\cap B) / P(A)=(1/6)/(1/2)=1/3$

(2) $P(A)P(B)= 1/2\times 1/3=1/6=P(A\cap B)$より、事象 A と B は独立です。

第 2 章

1. いずれの変数もいろいろな値をとることができ、変数の値に分布ができるので、確率変数となり得ます。

2. 確率 $f(x)$の和は 1 となるので、X は表の 4 つの値のみ取ることが分かります。

$E[X]=0.1\times1+0.5\times3+0.2\times6+0.2\times(-2)=0.1+1.5+1.2-0.4=2.4$

$V[X]= 0.1\times1^2+0.5\times3^2+0.2\times6^2+0.2\times(-2)^2-2.4^2=6.84$

別解： $V[X]=0.1\times(1-2.4)^2+0.5\times(3-2.4)^2+0.2\times(6-2.4)^2+0.2\times(-2-2.4)^2=6.84$

3. このサイコロを 1 回振って出る目を X とすると、X は等しい確率(1/４)で 1 から 4 の値をとる確率変数です。したがって、

$E[X]= (1/4)\times(1+2+3+4)=10/4=5/2$

$V[X]= 1/4\times(1^2+2^2+3^2+4^2)-(5/2)^2=30/4-25/4=5/4$

別解： $V[X]=(1/4)\times(1-5/2)^2+(1/4)\times(2-5/2)^2+(1/4)\times(3-5/2)^2+(1/4)\times(4-5/2)^2$

$=5/4$

4. このコインを 1 回トスしたときの平均 $E[X]$および分散 $V[X]$は

$E[X]=1000\times(1/2)+0\times(1/2)=500$

$V[X]= 1000^2\times(1/2)+0^2\times(1/2)-500^2=250000$

各コイントスはお互いの結果に影響を与えないと考えられます。したがってコインを 6 回トスしたとき、平均は $500\times6=3000$（円)、分散は 250000×6^2

$=9000000$（円^2）となります。

5．$E[X]=1\times p+0\times(1-p)=p$

$V[X]=1^2\times p+0^2\times(1-p)-p^2=p-p^2=p(1-p)$

6. 1 題当り正解する確率は 1/5 ですから、4 題中 3 題正解を選ぶ確率は

${}_4C_3(1/5)^3(1-1/5)^{4-3}=4\times(1/5)^3(4/5)=16/625$ となります。

少なくとも 1 題は正解を選ぶ確率は $1-{}_4C_0(1/5)^0(1-1/5)^{4-0}=1-(4/5)^4$

$=1-(256/625)=369/625$ となります。

7. 正解数の平均 $4\times(1/5)=4/5$

正解数の分散 $4\times(1/5)\times(1-1/5)=(4/5)\times(4/5)=16/25$

8. A 市の 1 週間当たりの交通事故数 X をポアッソン分布に従う確率変数 $f(x)$と考えられます。Xが 2 以上起きる確率は $1-f(0)-f(1)=1-0.050-0.149=0.801$ となります。

9. マークはハート、スペードなど 4 種類あり、それらはお互いに影響を与えず、独立です。また、復元抽出なので、あるマークが出る確率は毎回一定です。従って $P=5!/(2!\times2!\times1!)\times(1/4)^2\times(1/4)^2\times(1/4)^1=15/512$ となります。

10. 不合格品は 50-48=2 個あるので、求める確率は

${}_2C_1 \times {}_{48}C_{4-1} / {}_{50}C_4 = 2! \times 48!/(45! \times 3!)/(50!/46! \times 4!) = 184/1225$ となります。

11.　A: 平均 $0.15 \times 5 = 0.75$,　分散 $0.15 \times (1-0.15) \times 5 = 0.6375$

B: 平均 $0.15 \times 200 = 30$,　分散 $0.15 \times (1-0.15) \times 200 = 25.5$

12.　Excel または R を使うと $P(-\infty < X \leq 3000) = 0.108$ が得られます。

13.　表が出る回数 X は二項分布 Bi (240,1/2)に従うと考えられ、その平均は $np = 240 \times (1/2) = 120$、分散は $np(1-p) = 240 \times (1/2) \times (1-1/2) = 60 \fallingdotseq 7.75^2$ となります。試行回数が多いので X は $N(120, 7.75^2)$ に従うと考えられます。Excel 関数 NORM.S.DIST あるいは R 関数 pnorm を使うと、$P(110 \leqq X < +\infty) = 1-0.0985 = 0.902$ となります。

14.　$c = 1/(11-2) = 1/9$

15.　全確率は 1 であるから三角形の面積の公式より $(c-a) \times f(b)/2 = 1$ となります。

従って $f(b) = 2/(c-a)$ となります。

16.　①正規分布、　②負の二項分布、　③二項分布（またはポアッソン分布）、

④二項分布、　⑤ポアッソン分布

第 3 章

1. 平均 μ は標本平均と等しく、850（g）と推定できます。分散 σ^2 は中心極限定理より $30=\sigma^2/16$ が成り立つので、$\sigma^2=30\times16=480$（g^2）と推定できます。

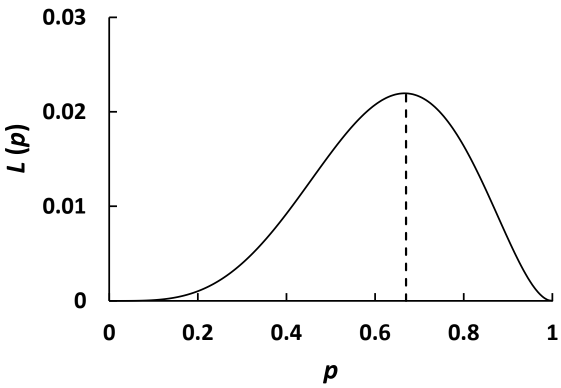
2. このコインを 1 回トスして表 H か裏 T が出る事象はベルヌーイ分布に従うと考えられるので、尤度関数 $L(p)$は 6 回の試行結果が起こる確率となります。従って、$L(p)= p(1-p)(1-p)ppp= p^4(1-p)^2$ となります。$L(p)$を微分すると、次のように表せます。

$$dL/_{dp}=\frac{d}{dp}\left(p^4-2p^5+p^6\right)=4p^3-10p^4+6p^5=2p^3(3p-2)(p-1)$$

増減表を作ると、$p=2/3$ のとき、$L(p)$は最大となることが分かるので、これが最尤推定量となります。

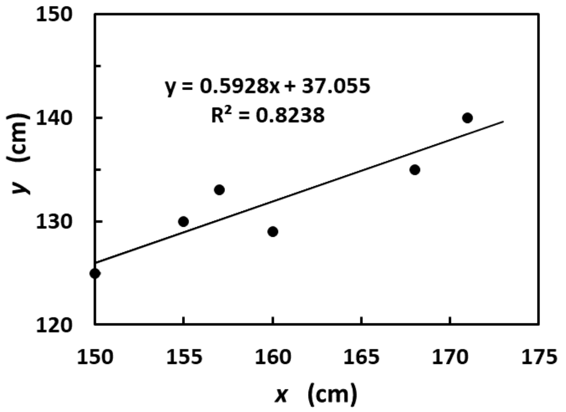
（別解）Excel のソルバー機能を使うと、次のように推定値が得られます。すなわち、下の図のようにセル C5 に p の値を入れ、セル D5 に $L(p)$の式を入れます。ここでは、p=0.2 の値を仮に代入しています。Excel の「データ」から「ソルバー」を選び、図のように入力すると、最適値 p=0.666…が得られます。

尤度関数 L(*p*)をグラフにすると下の図のように表せます。その Mode は図の破線で表したように 0.666…となり、これが最尤推定量です。



第 4 章

1.　下の図のように回帰分析でき、傾き 0.593、切片 37.1、決定係数 0.824 が得られます。



2.　$s = 2.303/300 \times \log(20/(20-5)) = 9.6 \times 10^{-4}$ (1/ml)

第 5 章

1.

A. 0.98	B. 10^{-4}	C. 98	D. 3	E. 10^{-4}
F. 0.98	G. 0.03	H. 0.030095	I. 0.0033	

2. $P(C|R)=(0.3\times0.001)/(0.4\times0.002+0.3\times0.002+0.3\times0.001)=3/(8+6+3)=3/17$

3. １つ目の白玉を取り出したとき $P(B|R)=(1/2)\times(3/5)/\{(1/2)\times(1/2)+(1/2)\times(3/5)\}=6/11$. ２つ目の赤玉を取り出したとき $P(B|R)=(6/11)\times(2/5)/\{5/11)\times(1/2)+(6/11)\times(2/5)\}=24/49$

従って、3 つ目の赤玉を取り出したとき $P(B|R)=(24/49)\times(2/5)/\{(25/49)\times(1/2)+(24/49)\times(2/5)\}=96/221$

4. 1 個目の検査に対して、何の情報もないため事前分布 $\pi_1(\theta)$を一様分布とおき、$\pi_1(\theta)=1$ とします。このとき、尤度は $f(\text{positive}|\theta)=f(1|\theta)=f(1)=\theta$ となりますから、事後分布 $\pi_1(\theta|R)$は次のようになります。

$$\pi_1(\theta|R)=\frac{1\cdot\theta}{\int_0^1 1\cdot\theta d\theta}=2\theta$$

次に、2 個目の検査に対して、事前分布 $\pi_2(\theta)$はベイズ更新により $\pi_1(\theta|R)$に等しく、尤度は $f(\text{negative}|\theta)=1-\theta$ ですから、事後分布 $\pi_2(\theta|R)$は次のようになります。

$$\pi_2(\theta|R) = \frac{2\theta(1-\theta)}{\int_0^1 2\theta(1-\theta)d\theta} = \frac{2\theta(1-\theta)}{1-\frac{2}{3}} = 6\theta(1-\theta)$$

次に、3 個目の検査に対して、事前分布 $\pi_3(\theta)$は $\pi_2(\theta|\mathrm{R})$に等しく、尤度は $f(\mathrm{negative}|\theta)=1-\theta$ ですから、事後分布 $\pi_3(\theta|\mathrm{R})$は次のようになります。

$$\pi_3(\theta|R) = \frac{6\theta(1-\theta)^2}{\int_0^1 6\theta(1-\theta)^2 d\theta} = \frac{\theta(1-\theta)^2}{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}} = 12\theta(1-\theta)^2$$

最終的に例題と同じ事後分布が得られます。

5.

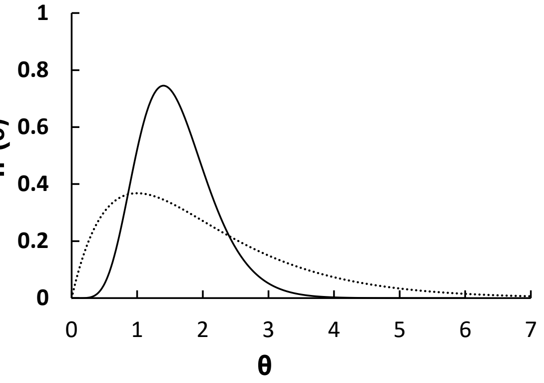
A. 二項	B. 40	C. 15	D. 15	E. 40	F. 15
G. 25	H. 一様	I. 1	J. 積	K. 15	L. 25

6. Be(k+c, n-k+d)において k=15, n=40, c=1, d=1 より、

Be(15+1, 40-15+1)=Be(16,26)

MAP=(16-1)/(16+26-2)=15/40=0.375. *EAP*=16/(16+26)=8/21

7. $\mu=\alpha/\lambda=2$, $\sigma^2=\alpha/\lambda^2=2$ より $\alpha=2$, $\lambda=1$ が得られるので、事前分布 $\pi_0(\theta)$は Ga(2,1)です。従って事後分布 $\pi_1(\theta|\mathrm{D})$の $\alpha_1=2+6=8$ および $\lambda_1=1+4=5$ となります。ただし、n=4、$\bar{x}$=6/4 です。最終的に事後分布 $\pi_1(\theta|\mathrm{D})$は Ga(8,5)で、確率分布は次の図の実線のようになります。なお、破線は事前分布を示します。



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
π (θ)
0
1
2
3
4
5
6
7
θ

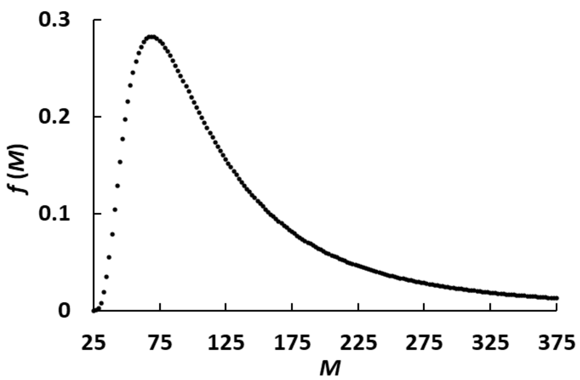
第 6 章

1.　f(P1)=Beta(4+1,25-4+1)=Beta(5,22)

f(P2)=Beta(1+5,10-1+22)=Beta(6,31)

2.　$f(\lambda|\alpha,t)=Gam(26,1/4)$

3.　M は $f(M\,|\,s,\,n,\,D)$= Hypergeo (3, 13, 16, M)で表され、図のような分布を示します。なお、MAP=69 です。



第 9 章

1　(1) $R=(1-(1-0.95)\times(1-0.92))\times0.9=(1-0.05\times0.08)\times0.9=0.8964\fallingdotseq0.896$

(2) $R=(1-(1-0.95)\times(1-0.92))\times(1-(1-0.9)\times(1-0.9))=(1-0.05\times0.08)\times(1-0.01)$

$=0.98604\fallingdotseq0.986$

(3) $R=(1-(1-0.95)\times(1-0.92)\times(1-0.9))\times(1-(1-0.9)\times(1-0.9))=(1-$

$0.05\times0.08\times0.1)x(1-0.12)=0.9996\times0.99=0.989604\fallingdotseq0.990$