Software Design 2019 年 3 月号 微分積分の基礎 解説

著者: 橘 慎太郎 [1] and イラスト: タネグサ [2]

[1]https://umentulab.com Twitter: @umekichinano
[2]Twitter: @tanegusa1221

1　この補足説明について

この補足説明は, 本誌では扱わなかった数学的により厳密な理解を求めている方向けの解説です. そのため, 機械学習をやる上で必要なことだけではなく, 数学的に重要だと思われる項目の紹介をしています. 特に【難】と書かれている節に関しては理解に時間がかかると思われますが, 落ち込まないで読んでください（筆者もはじめはだいぶ苦しみました）.

証明はほぼ省いています. 証明を知りたい方は末尾に掲載してある参考書を御覧ください.

この解説が次の一歩へのきっかけになることを願っています.

2　記号について

専門書でよく使われる記号を紹介します.

数学では集合というものを扱います. 集合とはある要素（数のようなもの）の集まりで,$\{\}$ で表します. $\{1, 2, 3\}$ と書くと,1, 2, 3 の要素を含む集合という意味です. $\in$ は**要素である**という意味の記号です.1 は $\{1, 2, 3\}$ の要素であるため, $1 \in \{1, 2, 3\}$ と表します.4 は $\{1, 2, 3\}$ の要素でないため,$4 \notin 1, 2, 3$ と表します. もし集合に要素がないときは**空集合**といい,$\emptyset$ で表します. また, ある集合の一部を切り取った集合を**部分集合**といいます. Y が X の部分集合であるとき,$Y \subset X$ と表します.

次の章で説明しますが, 自然数全体を $\mathbb{N}$ と表します.1 は自然数のため, 記号では,$1 \in \mathbb{N}$ と表します.

また, 集合を表すときに条件を指定する場合があります. 例えば, $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ は 2 で割り切れる $\}$ と書いた場合は $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ と同じ意味を持ちます.

最後にあまり使いませんが, ガウス記号 [] を紹介します. ガウス記号は, $[x]$ のように使い,$n \leq x \leq n+1$ なる整数 n を表現します. 例えば,[1.4] であれば,$1 < 1.4 < 2$ のため,$[1.4] = 1$ となります. また,$[-\frac{1}{2}]$ であれば,$-1 \leq -\frac{1}{2} \leq 0$ のため, $[-\frac{1}{2}] = -1$ となります.

3　数について

本来は数についてからお話しないといろいろと整合性が取れなくなるのですが, 本誌のページ数の都合上, あまりお話できませんでした. そのため, 簡単に数についてお話します.

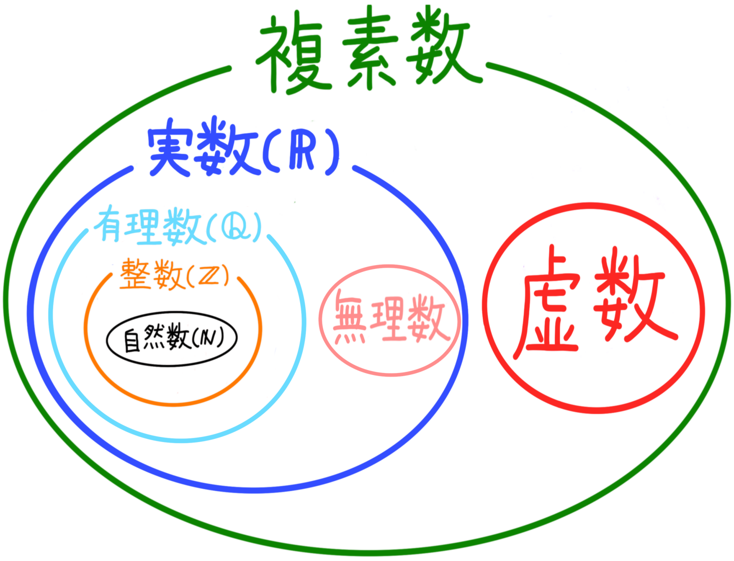


図 1 それぞれの数の包含関係

数, といってもいろいろあります. 普通数というと,$1,2,3,\ldots$ と浮かべる方も多いと思いますが, これらは**自然数**と呼ばれています. 自然数は一般的には 1 から始まり無数にあります. 自然数全体は $\mathbb{N}$ と表します. [*1]

次に出てくる数は**整数**です. 整数は $\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ のような数で, 自然数全体に $-$ がついた自然数と 0 が追加されています. 整数全体は $\mathbb{Z}$ と表します. また, 数の種類としては $\{\pm1,\pm3,\pm5,\ldots\}$ のような**奇数**や $\{0,\pm2,\pm4,\ldots\}$ のような**偶数**もありますね. 奇数, 偶数も整数の一部です.

次に出てくる数は**有理数**です. 有理数は,$\frac{1}{3}$ や $-\frac{2}{5}$ などの分数の形で表せる数です. 数学的には,$\{\frac{p}{q} \mid p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ と表します. 例えば 2 も $\frac{2}{1}$ と表せるため, 整数の有理数の一部です. 有理数全体は $\mathbb{Q}$ で表します.

有理数に対して, 分数の形で表せない数を**無理数**といいます. 無理数は $\sqrt{2}$ や π などが代表的です. 無理数全体を表す記号はありません.

有理数全体と無理数全体をあわせた数を**実数**といいます. 私達が日頃目にする数はほとんど実数の中にあります. 実数全体を $\mathbb{R}$ で表します.

この説明では扱いませんが**虚数**も紹介しておきましょう. 虚数は,i と呼ばれる二乗すると -1 になる数を含む数全体を表します. 記号で表すと,$\{ia \mid a \in \mathbb{R}\}$ で表します. 虚数全体を表す記号はありません。

また、実数と虚数を合わせた数を**複素数**といいます。複素数は $\{a+ib \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ で表します。複素数全体は $\mathbb{C}$ で表します.

今回ご紹介した微分積分では実数が前提となっていますが, 複素数でも微分積分を考えることができます. また, 数学でも物理学でもそうですが, 実数で考えるとうまく説明できないことでも複素数だとうまく説明できるということがかなりたくさんあります. 興味がある方は複素関数論などを調べてみてください.

余談として, 上記で紹介した数全体は無数にあるため, 個数を数えることはできません. そのため数学では, **濃度**として無限集合の「個数」に当たるものを考えます. 濃度をみていくと, 上で紹介した「自然数」「整数」「奇数」「偶数」「有理数」はすべて同じ濃度になることが知られています.

[*1] フランス等では 0 から始まります. 論文を読む際などは注意が必要です.

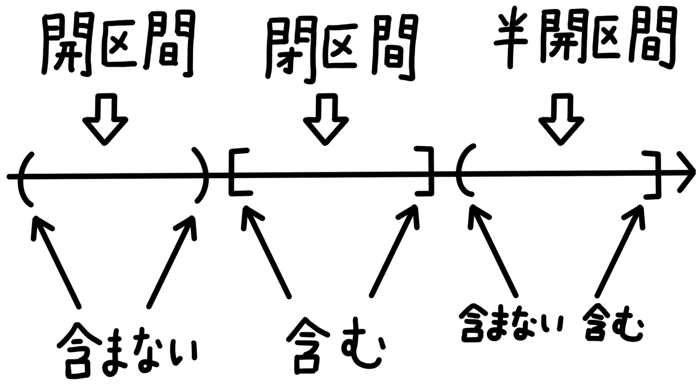


図 2 区間を数直線で表す

4　実数

4.1　実数の区間

本誌でも実数についてさらっとご紹介しておりますが, もう少し踏み込んで説明します. まず**区間**を定義します.

定義 1. $a, b \in \mathbb{R}$ (ただし $a < b$) とする. このとき

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

をそれぞれ**開区間**, **閉区間** という. また

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

を**半開区間**という.
ただし実数全体 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ は開区間でもあり閉区間でもあるとする.

区間は実数の範囲を表します. 図 2 の通り, 数直線で表すとわかりやすいかもしれませんね.

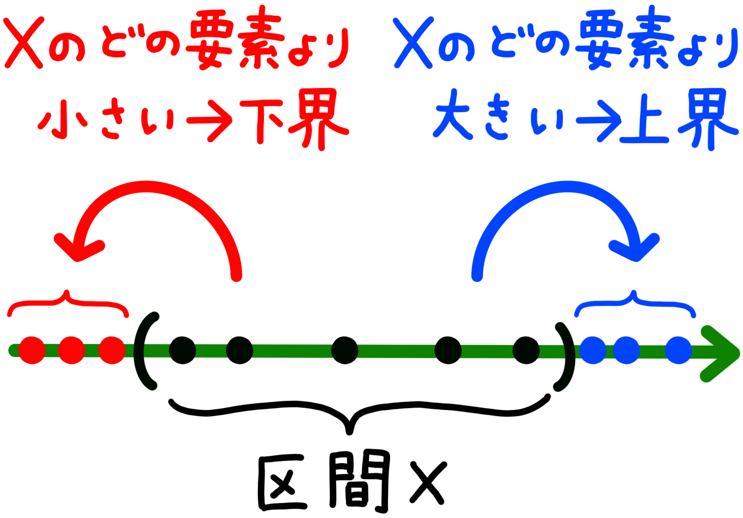


図 3 上界・下界

4.2 実数の上界・下界

次に, 区間の特徴である**上界・下界**を紹介します.

定義 2. X をある実数上の区間であるとする. $a \in \mathbb{R}$ が X の**上界**であるとは, すべての $x \in X$ に対して

$$x \leq a$$

を満たすことである. また, $b \in \mathbb{R}$ が X の**下界**であるとは, すべての $x \in X$ に対して,

$$b \leq x$$

を満たすことである.

少し難しくなったかもしれません. 何をいっているかというと, 上界はある区間のすべての要素より大きい数, 下界はある区間のすべての要素小さい数であるといいっているのです (図 3) ある区間 X が上界を持つとき,X は**上に有界**であるといいます. また X が下界を持つとき,X は**下に有界**であるといいます. 更に X が上界と下界の両方を持つとき,X は**有界**であるといいます. 特に, 有界閉区間を**有界閉区間**といいます.

4.3 近傍

このあとで使う極限や連続性でよく用いられる概念として**近傍**というものがあります. 近傍は, ある点の周辺を意味しています.

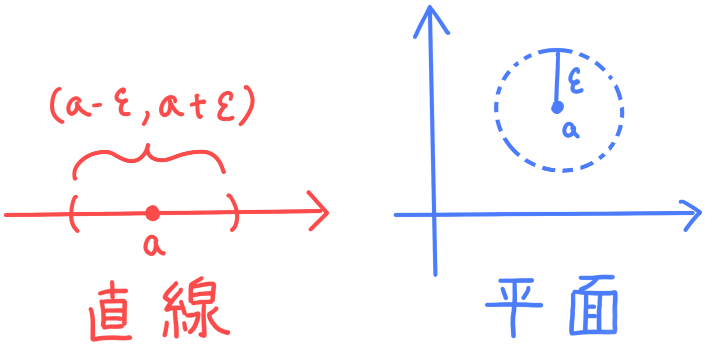


図 4 近傍の図

定義 3. 任意の実数 $\epsilon > 0$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して,

$$U_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \epsilon\} = (a - \epsilon, a + \epsilon)$$

を a の**近傍**という.

$U_\epsilon(a)$ とみると難しく見えるかもしれませんが, 図 4 をみると点 a を中心として ϵ の距離の開区間です. 平面の場合は円になります（円の境界線の部分は含みません）.

4.4 実数の最大値・最小値

定義 4. X をある実数上の区間であるとする. $a \in \mathbb{R}$ が X の上界かつ $a \in X$ を満たすとき,a を X の**最大値**といい $\max X$ と表す. $b \in \mathbb{R}$ が X の下界かつ $b \in X$ を満たすとき,b を X の**最小値**といい $\min X$ と表す.

X が 開区間のときは**最大値・最小値を持ちません.** 例えば, 開区間 $(0, 1)$ の場合は 0 が下界となりますが, $0 \notin (0, 1)$ のため $\min(0, 1)$ は存在しません. また,1 は $(0, 1)$ の上界ですが,$1 \notin (0, 1)$ のため $\max(0, 1)$ は存在しません. 逆に閉区間は最大値・最小値を持ちます. 閉区間 $[0, 1]$ は 0 が下界かつ $0 \in [0, 1]$ のため,$\min[0, 1] = 0$ です. また,1 は上界かつ $1 \in [0, 1]$ のため,$\max[0, 1] = 1$ です.

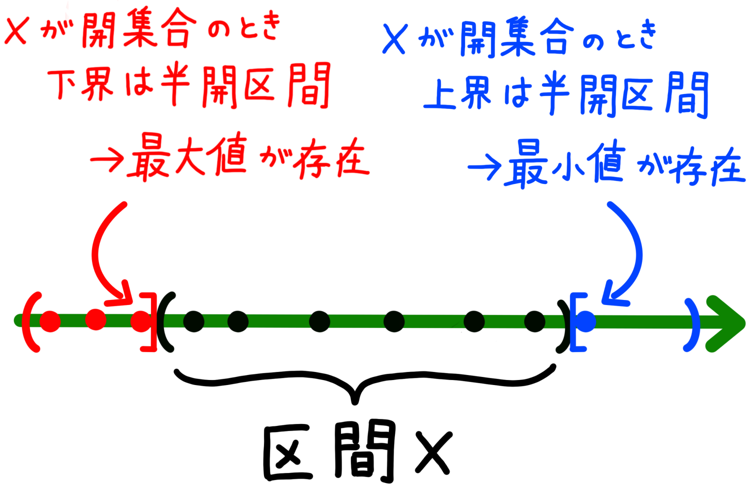


図 5 上限・下限

4.5 実数の上限・下限

次に紹介する**上限・下限**は開区間でも存在します.

定義 5. X をある実数上の区間であるとする. X の上界が存在するとき, その上界の最小値を**上限**といい,$\sup X$ と表す. また X の下限が存在するとき, その下界の最大値を**下限**といい, $\inf X$ と表す.

まどろっこしい定義ですね. 図 5 を見てみましょう.X が開区間の場合は, 上界・下界ともに半開区間になります. そのため, 上界には最小値が, 下界には最大値が存在します. そのため, 開区間にも上限・下限が存在するというわけです. X が閉区間の場合は,$\sup X = \max X, \inf X = \min X$ となります.

4.6 実数の連続性

連続性は大雑把に紹介します. 実数について次の性質が知られています.

公理 1 (実数の連続性の公理)**.** 空でない集合 X が上に有界ならば,X には上限が存在する. また,X が下に有界ならば X には下限が存在する.

上の公理は何をいっているかというと,「実数はつながっている」ということです. 自然数の場合は,1 と 2 の間に $\frac{1}{2}$ といった数があるため,「穴」があります. 自然数より細かそうな有理数でも, ある 2 つの有理数の間には無理数が存在しうるため,「穴」があります. ですが実数にはどんな 2 つの実数の間にも実数があるため,

「穴」がないのです.

これを厳密に理解しようとすると,「デデキントの切断」による実数の構成方法を見ていく必要がありますが, そこまで理解する必要はあまりないでしょう. 実数はつながっている, それだけで十分です.

4.7 【難】アルキメデスの公理

実数の知られている諸性質の中でも, 重要な性質である**アルキメデスの公理**を紹介します.

公理 2 (アルキメデスの公理)**.** 任意の正の実数 a, b に対して,$b < na$ なる整数 n が存在する.

シンプルですが, 何をいっているかというと「何倍かすればいくらでも大きな実数を作れる」ということです. しかし, 厳密にみていくとそれほどシンプルな話ではありません.n を $\frac{b}{a}$ より大きい整数をとってくればよさそうですが, そのような n が存在するといえるでしょうか. 当たり前のようで当たり前ではないのです.

証明がとても鮮やかなため, 証明を紹介したいと思います.

証明. 背理法で示す.[a] すべての自然数 n に対して $b > na$ となるとする. このとき $X = \{na \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおけば,b が上界となるから X は上に有界である. よって, 実数の連続性の公理より,X は上限 s が存在する.

このとき,a は正の実数より $s - a$ は s より小さく, また s は X の上限より X の上界の最小値であるから,$s - a$ は上界ではない. よって,

$$s - a < ma$$

となる自然数 m が存在する. これより

$$s < (m + 1)a$$

であるが,X の定義より $(m + 1)a \in X$ であるから,s が X の上限であることに矛盾する. よって $b < na$ となる自然数 n が存在する.

[a] 背理法とは,A を示したいときに A でないことを仮定して矛盾があることを示す証明の方法です.

5 関数

本誌では関数をさらっと説明するにとどまりましたので, 正確に定義します.

定義 6. X を $\mathbb{R}$ の空集合でない部分集合とする．このとき,

$$f : X \to \mathbb{R}$$

を**関数**という.$x \in X$ に対応する値を $f(x)$ と表す.
また,X を f の**定義域**といい, X に対応する値の集合 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を f の X における**値域**という.

本誌でも「a と $f(a)$ という値を紐づけている のが $f(x)$」と紹介しましたが, この定義をみるとそれがみてとれますね.

次に機械学習でもよく出てくる関数の特徴である**単調性**を紹介します.

定義 7. X を実数上のある区間とする．このとき,X 上に定義された関数 f と X の要素 x_1, x_2 に対し

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

であるとき,f を**単調増加**であるという. また,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

であるとき,f を**狭義単調増加**であるという.

定義 8. X を実数上のある区間とする．このとき,X 上に定義された関数 f と X の要素 x_1, x_2 に対し

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

であるとき,f を**単調減少**であるという. また,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

であるとき,f を**狭義単調減少**であるという.

単調増加は右肩上がりのグラフ, 単調減少は右肩下がりのグラフのことをいっています．単調増加は「グラフが右肩上がり, もしくは横一線」であるのに対し, 狭義単調増加は「常に右肩上がり」です．単調減少と狭義単調減少も同様です. そのため, 単調増加関数を微分した結果は必ず 0 以上の値をとります．狭義単調増加関数を微分した結果は必ず 0 より大きい値をとります.

また,$f(x)$ が単調減少関数もしくは狭義単調減少関数の場合,$-f(x)$ とすれば単調増加関数もしくは狭義単調増加関数となるため, 表裏一体の性質と言えますね.

6　極限

6.1　数列

数列とは,$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5$ のような数の並びとして高校では習います．操作数列や等比数列といった言葉を覚えている方もいるのではないでしょうか．実は, 数列も関数の一つであるといえます.

例えば,$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{1}{5}$ の場合, 番号 1 に対して値 1 を, 2 に対して値 $\frac{1}{3}$ を,3 に対して値 $\frac{1}{5}$ を a が紐付けているとみなすことができます．このように, 数列は自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ から実数への関数なのです.

大学数学で数列を考えるときに注目する点は, 数列 $\{a_n\}$ の n を無限大にしたときにどうなるか, ということです. 数列がある値に定まることを**収束する**といいます．一方,∞ もしくは $-\infty$ になってしまうことを**発散する**といい, また一つの値に定まらないことを**振動する**といいます. いくつか例を見てみましょう.

例. 数列 $a_n = \frac{1}{n}$ は $y = \frac{1}{x}$ のグラフを思い浮かべるとわかるように, 右に行くに連れて 0 に近づいて行きます. そのため 0 に収束します.

例. 数列 $a_n = -n$ は $y = -x$ のグラフを思い浮かべるとわかるように, 右に行くに連れていくらでも小さくなります. そのため $-\infty$ に発散します.

例. 数列 $a_n = (-1)^n$ は n が奇数のときは -1 に,n が偶数のときは 1 になります. それがずっと繰り返されるため, 振動します.

先程, 数列の収束・発散・振動を説明しましたが,「値が定まる」など曖昧なものでした．それらを厳密に定義するために, 数学科の一年生の最初の鬼門とされている $\epsilon - N$ 論法を紹介します．[*2]

6.2　$\epsilon - N$ 論法の前に

$\epsilon - N$ 論法の前に,2 つの値が等しいとはどういうことかを今一度定義してみましょう.$1 = 0.999999\ldots$ がなぜ成り立つのか, というのを某掲示板のまとめサイトなどで目にしますが, 数学ではある 2 つの値が等しいということを次のように定義しているからです.

[*2] イプシロン-エヌ論法と読みます.

定義 9. $a, b \in \mathbb{R}$ とする. このとき, 任意の実数 $\epsilon > 0$ に対して,

$$|a - b| < \epsilon$$

のとき,$a = b$ である.

定義を少し説明すると, 正の実数 ϵ をどんなに小さくとっても a と b の差 $|a - b|$ が ϵ 未満になるとき,$a = b$ となると定義しています. これは何を言っているかというと,「a と b が一致するときは, $|a - b|$ はいくらでも小さくなる」ということです.

$1 = 0.999999\ldots$ がなぜ成り立つかというと,$|1 - 0.999999\ldots|$ はどのような ϵ よりも小さくなるから, ということですね.

6.3 【難】数列の収束・発散

さて,$\epsilon - N$ 論法の説明に入りましょう. ここでは数列を扱うため,$\epsilon - N$ 論法を紹介します. 関数の章で $\epsilon - \delta$ 論法を扱いますが, 本質的には同じです.

定義 10. 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が任意の実数 $\epsilon > 0$ に対し, ある自然数 N が存在して,

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon$$

を満たすとき,$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は a に**収束する**といい,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

と表す. この a を $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の**極限値**という.
$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束しないとき,$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は**発散する**という.

これを一発で分かる人はいないと思います. 図で説明します.

$a_{n n\in\mathbb{N}}$ が a に収束するときには,a を含むどんなに小さい開区間 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ をとったとしても, 十分に大きい N 以上の n であれば, $a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ となるといっているのです.ϵ が限りなく 0 に近い数であっても,N を十分に大きくすればいいわけです.

直感的にはなかなか受け入れがたいかもしれません. 数学を専門的に学んでいても慣れるのにはそれなりに時間がかかります. ですので,「厳密にはそういう風に定義しているのだな」と頭の片隅に入れておいてもらえるだけで十分です.

$\epsilon - N$ 論法について, 一つ例を紹介します.

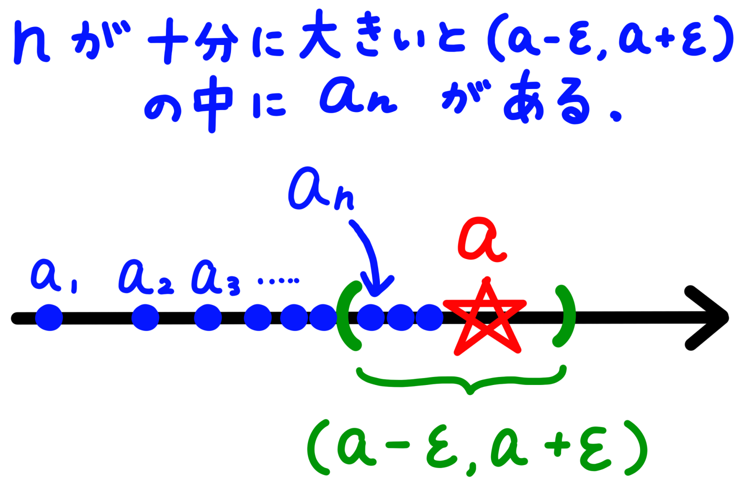


図 6 $\epsilon - N$ 論法

例. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ を $\epsilon - N$ 論法を使って示す.
任意の実数 $\epsilon > 0$ に対して, ガウス記号[a] を使って, 自然数 N を $N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$ と決める. このとき,

$$N > \frac{1}{\epsilon}$$

であるから, $n \geq N$ なる自然数 n に対して,

$$n \geq N > \frac{1}{\epsilon}$$

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} \leq \epsilon$$

である. よって,

$$\begin{aligned}|\frac{1}{n} - 0| &= \frac{1}{n}\\ &< \epsilon\end{aligned}$$

であるから,$|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ である. よって,$\frac{1}{n}$ は 0 に収束する.

[a] ガウス記号については「2」を参照してください.

ϵ や N が突然出てきて戸惑うかもしれませんが, 「任意に $\epsilon > 0$ をとって, ある自然数 N を決めると,N 以上の n に対して $|\heartsuit - \clubsuit| < \epsilon$ になる. よって,$\heartsuit$ は $\clubsuit$ に収束する.」という証明方針は変わりません. どのようにうまく N を見つけられるかが鍵になります.

6.4 極限の一意性

収束する数列は, 必ず一つの極限値しか持たないことが知られています. これが**極限の一意性**です.

定理 1 (極限の一意性)**.** 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するならば, 極限値は一意である.

6.5 数列の諸性質

ここでは簡単に紹介するに留めますが, 数列は様々な性質が知られています. 詳しくは解析学や微分積分学の専門書をご覧ください.

定理 2 (積と商の極限)**.** 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するならば,$\{a_nb_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ も収束し,

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$$

が成り立つ. また,$\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ も収束し,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

が成り立つ.

定理 3 (はさみうちの原理)**.** 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が

$$a_n \leq c_n \leq b_n \qquad (n\in\mathbb{N})$$

を満たすとする. また,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

であるとき, 数列 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ も α に収束する.

定理 4 (数列の有界性)**.** 収束する数列は有界である.

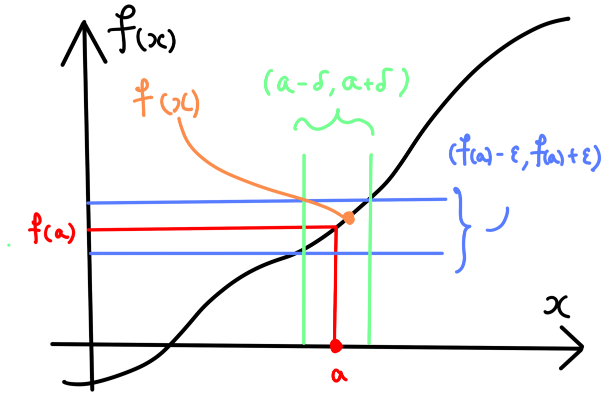


図 7 関数の極限

定理 5. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ である.

7 関数の連続性

7.1 【難】関数の極限

数列の章では $\epsilon - N$ 論法を使って極限を定義しましたが, 関数では少し拡張して $\epsilon - \delta$ 論法を使って関数の極限を定義します.

定義 11. 関数 $f(x)$ は少なくとも x 軸上の点 a の近傍で定義されているものとする.[a] このとき, 任意の実数 $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $|x - a| < \delta$ を満たす任意の x について

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

が成り立つとき,$f(x)$ は $f(a)$ に**収束する**といい,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

と表す. また $f(a)$ を $f(x)$ の**極限値**であるという.

[a] このとき, 近傍の中の点 a は定義域から外れていても構いません.

ϵ や δ など記号がいろいろ出てきて複雑に見えますね. しかし, 根本的には $\epsilon - N$ 論法と変わりません. $\epsilon - N$ 論法の場合には, 数列 $\{a_n\}$ がある整数 N 以上の整数 n より先は $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ の間に a_n があるという

ものでした．今度は, ある開区間 $(a-\delta, a+\delta)$ の間に x があるならば, $(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$ の間に $f(x)$ があるというものです.

図 7 を見てみましょう．$f(x)$ が点 $f(a)$ に収束することを見ていきます．まずある ϵ を決めます.ϵ は 0 より大きい実数であればどのような値でも構いません．すると開区間 $(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$ を考えることができます（図 7 の青色）．次に ϵ に応じてある $\delta > 0$ を決めます．すると開区間 $(a-\delta, a+\delta)$ を考えることができます．（図 7 の緑色）このとき,x が $(a-\delta, a+\delta)$ の中にあるならば,$f(x)$ が $(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$ の間にあるとき, $f(x)$ は $f(a)$ にあることを確認します. これがどんな ϵ をとっても成り立つとき, $f(x)$ は $f(a)$ に収束するのです.

これでもおそらくいまいちピンとこないかと思いますので, 例を見てみましょう.

例. $f(x)=2x$ が $\lim_{x\to 2} f(x)=4$ であることを示す.
今,$\epsilon=2$ とする. このとき,$\delta=\frac{\epsilon}{2}=1$ とおけば,

$$x\in(2-\delta,2+\delta)=(1,3)$$

ならば

$$\begin{aligned}(f(1),f(3))&=(2,6)\\&=(4-\epsilon,4+\epsilon)\end{aligned}$$

より

$$f(x)\in(4-\epsilon,4+\epsilon)$$

である. これを $\epsilon-\delta$ 論法に置き換えると

$$|x-2|<\delta(=1)\Rightarrow|f(x)-4|<(\epsilon=2)$$

が成り立っている.
一般化して, 任意の $\epsilon>0$ に対して,$\delta=\frac{\epsilon}{2}$ とおけば,

$$x\in(2-\frac{1}{\epsilon},2+\frac{1}{\epsilon})$$

ならば

$$\begin{aligned}(f(2-\frac{1}{\epsilon}),f(2+\frac{1}{\epsilon}))&=(4-\epsilon,4+\epsilon)\\&=(4-\epsilon,4+\epsilon)\end{aligned}$$

より

$$f(x)\in(4-\epsilon,4+\epsilon)$$

であることがわかる. これを $\epsilon-\delta$ 論法に置き換えると,

$$|x-2|<\delta(=\frac{\epsilon}{2})\Rightarrow|f(x)-4|<\epsilon$$

であるから,$\lim_{n\to 2} f(x)=4$ であることがわかる.

高校だと $\lim_{n\to 2} 2x=4$ と習うのですが, 厳密に議論しようとするとこのように $\epsilon-\delta$ 論法が必要になります. 暗記したりするものではないので, まずは「このように議論する」と覚えておいて, 必要に応じて慣れるようにしてみてください.

7.2 関数の連続性

$\epsilon-\delta$ 論法を使うことで, 関数の連続性を定義することができます. 最初に各点における連続性を定義します.

定義 12 (各点における連続性)**.** 関数 $f(x)$ が少なくとも実数 a の近傍 $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ で定義されているとする. このとき

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

を満たすとき,$f(x)$ は点 a で**連続である**という.

$\epsilon - \delta$ 論法で表すと, 任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して, $|x-a| < \delta$ を満たす任意の x について

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

となることである.

関数の各点における連続性は, 先程扱った関数の極限の定義と同じです. この定義は「ある一点に関して」連続であるといっているのですが, 微分積分学で扱う連続関数はもう少し「強い」条件が必要です. 次に連続関数の定義を紹介します.

定義 13 (連続関数)**.** 関数 $f(x)$ がある区間 I で定義されているとする. このとき, 任意の点 $a \in I$ に対して

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

を満たすとき,$f(x)$ は区間 I 上の**連続関数**という.

$\epsilon - \delta$ 論法で表すと, 任意の $a \in I$ と任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して,$|x-a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ について

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

となることである.

各点における連続と連続関数の違いは,a が固定されているか, 区間上の任意の点かという点です. 連続関数は区間上のどの点をとってきても連続であるというとても強い定義になっています.

7.3 中間値の定理

連続関数でよく使われる定理として, **中間値の定理**というものがあります. まず定理を紹介します.

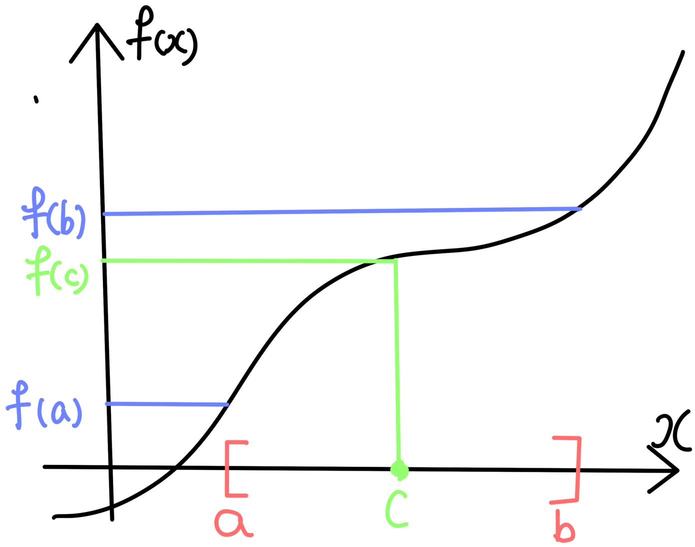


図 8 中間値の定理

定理 6 (中間値の定理)**.** $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ 上で連続であり, かつ $f(a) \neq f(b)$ とする. このとき $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の実数 y に対して,

$$a < c < b, \qquad f(c) = y$$

となる実数 c が存在する.

小難しく言っているようですが, 図にすれば明らかです（図 8）. 関数が連続していれば, 間に必ず数があるということをいっています. 地味ですが, とても活躍する場面の多い定理です.

7.4 最大値・最小値の定理

中間値の定理と並んでこちらも当たり前に感じるかもしれませんが, **最大値・最小値の定理**というものがあります.

定理 7 (最大値・最小値の定理)**.** $f(x)$ が有界閉区間 $[a, b]$ で連続であるとき,$f(x)$ は $[a, b]$ 上に最大値・最小値を持つ.

「連続していればある閉区間上で $f(x)$ の最大値・最小値がある」というとてもシンプルなものなのですが, 証明するには「$f(x)$ が $[a, b]$ 上で有界であること」を確認した上で「$f(x)$ が $[a, b]$ 上で最大値・最小値を持つこと」を示す必要があります.

最大値・最小値の定理は, 微分の章で紹介する「ロルの定理」と呼ばれる重要な定理の証明に使われてい

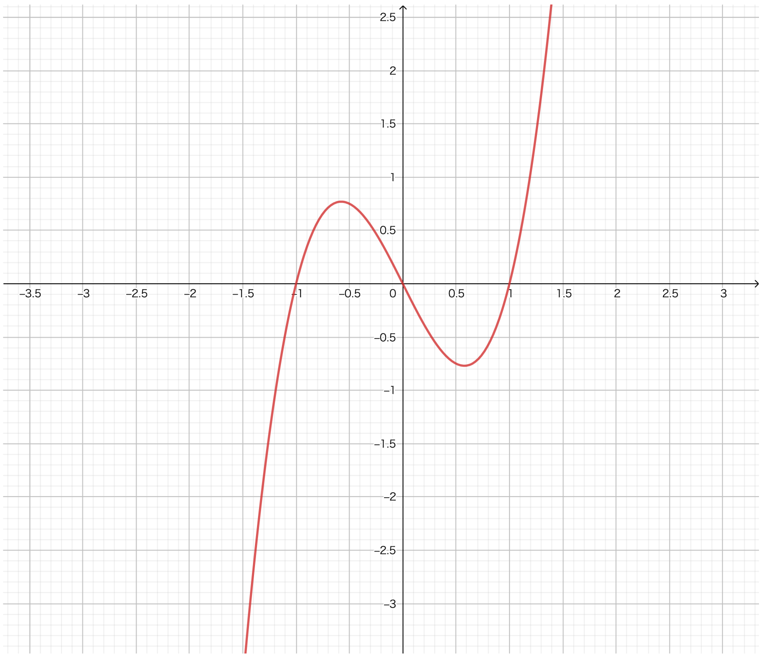


図 9 $f(x) = 2x^3 - 2x$ のグラフ

ます.

8 微分

解説 1. 誌面の「*3.13* 最大値・最小値を求める」について補足説明します. 本誌では

> ある点における微分の結果が 0 だった場合, その点は関数の最大値もしくは最小値となります.

となると説明しています. しかしこれは少し大雑把な説明になっています. $y = 2x^3 - 2x$ という式を例に見てみましょう.$y = 2x^3 - 2x$ グラフは図 *9* のとおりです. 図 *9* をみても分かる通り,x を小さくすると $f(x)$ は $-\infty$ となり, また x を大きくすると $f(x)$ は $+\infty$ となっています.
7 を思い返すと,「有界閉区間上の連続関数は最大値・最小値を持つ」というものでした. つまり, 有界閉区間上で連続であれば, 確実に最大値・最小値を持つことになります.
単に閉区間では最大値・最小値の存在の保証はありません. また開区間でも最大値・最小値が存在している保証がありません.

8.1 ロルの定理

導関数の特徴を知るのに**平均値の定理**は欠かせないものですが, 平均値の定理の証明に使われる**ロルの定理**も重要な定理ですので, ここで紹介しておきます.

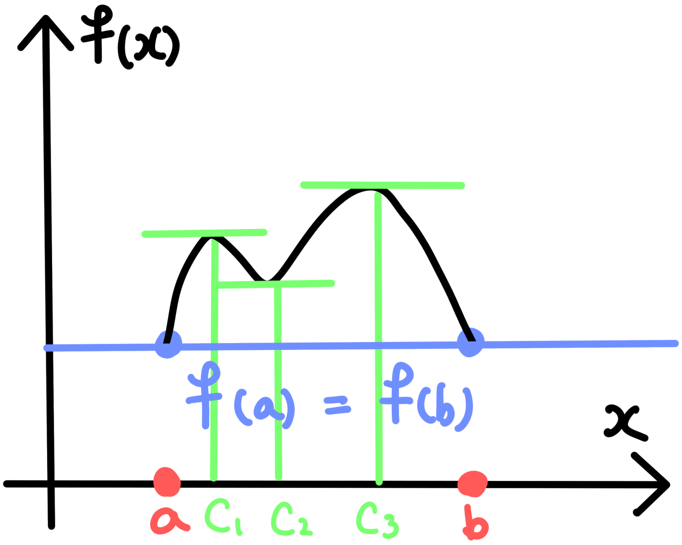


図 10 ロルの定理

定理 8 (ロルの定理)**.** 関数 $f(x)$ は $[a,b]$ で連続,(a,b) で微分可能とする．更に $f(a)=f(b)$ であるとき, ある $a<c<b$ なる実数 c で

$$f'(c)=0$$

となるものが存在する．

$f'(c)=0$ ということは,c で $f(x)$ は最大値か最小値を持つことがわかります. つまり, 図にすると次のようになります（図 10）.

$f(a)=f(b)$ なので, 必ずその間は必ず山か谷があることになります．そのため, 山頂か谷底があるというわけですね.

8.2 平均値の定理

さて, 導関数の特徴で最も重要といっても過言でない, 平均値の定理を紹介します.

定理 9 (平均値の定理)**.** 関数 $f(x)$ は $[a,b]$ で連続,(a,b) で微分可能とする. このとき,$a<c<b$ なる c で

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (\star)$$

を満たすものが存在する.

ロルの定理と少し似ていますね. こちらも図で表してみましょう（図 11）.

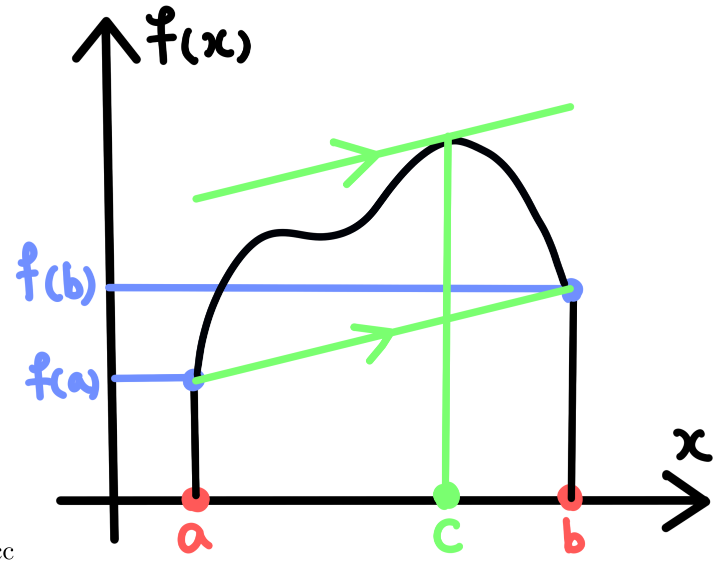
cc  c

図 11 平均値の定理

c

$(\star)$ の左辺を見ると, 点 a と点 b の平均変化率であることがわかります. また, 右辺は $a < c < b$ を満たす点 c での $f(x)$ の導関数です. つまり, $(a, f(a))$ と $(b, f(b))$ を通る直線の傾きと $f(x)$ の点 c における接戦の傾きが等しいものが存在するというわけです.

平均値の定理は本誌でも紹介した**微分積分学の基本定理**の証明等でも活躍します. また次の節で紹介する, **テイラーの定理**は平均値の定理を一般化したものです.

8.3 【難】テイラーの定理

テイラーの定理は, 機械学習でも理論の証明でしばしば登場します. いままで 1 回微分しか扱っていませんでしたが, テイラーの定理では n 回微分が登場します. まず n 回微分を定義します.

定義 14. $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の導関数 $(f'(x))'$ が存在するとき,$(f'(x))'$ を $f(x)$ の**第 2 次導関数**といい,

$$f^{(2)}(x), \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

などと表す. 同様に $f(x)$ を n 回微分した導関数が存在するとき, その導関数を**第 n 次導関数**といい

$$f^{(n)}(x), \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

などと表す.

一つ例を見てみましょう.

例. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ に対して,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 4x \\ f^{(2)}(x) &= 6x + 4 \\ f^{(3)}(x) &= 6 \\ f^{(4)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

となる.

n 回微分は, 微分した結果を微分するだけなので計算自体は簡単ですね. さて, テイラーの定理を紹介します.

定理 10 (テイラーの定理)**.** 関数 $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ において n 回微分可能ならば

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} (f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!}) + f^{(n)}(c)\frac{(b-a)^n}{n!}$$

を満たす $c(a < c < b)$ が存在する.

$k! = k \times (k-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1, 0! = 1$ を表します. n 次元だと難しく見えますが,$n = 1$ のときを見てみましょう.

例. $n = 1$ のとき,

$$\begin{aligned} f(b) &= f^0(a) \times (b-a)^0 0! + f'(c)\frac{b-a}{1!} \\ &= f(a) + f'(c)(b-a) \end{aligned}$$

で, 式変形すると

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$$

より平均値の定理となる.

テイラーの定理を使うことで,n 回微分可能な関数 $f(x)$ を n 次導関数を使って表現することができます. 代表的な例として,$\sin x$ や $\cos x$ も展開できます.

例.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots$$

参考文献

[1] 微分積分学入門・北海道大学 大学院理学研究院 黒田紘敏 http://www7b.biglobe.ne.jp/h̃-kuroda/pdf/text_calculus.pdf

[2] 解析入門 I(基礎数学 2)・杉浦光夫

[3] 定本 解析概論・高木貞治

[4] 解析入門 原書第 3 版・S. ラング (著), 松坂 和夫 (翻訳), 片山 孝次 (翻訳)