Software Design 2019 年 3 月号 微分積分の基礎 練習問題

著者: 橘 慎太郎[1] and イラスト: タネグサ[2]

[1]https://umentulab.com Twitter: @umekichinano
[2]Twitter: @tanegusa1221

1　微分

簡単な微分の計算

例. $f(x) = 4x^3$ を x について微分すると,

$$\begin{aligned} f(x)' &= 4 \times 3 \times x^{(3-1)} \\ &= 12x^2 \end{aligned}$$

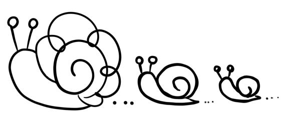
となる. 定義に従うと,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{4(x+h)^3 - 4x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4x^3 + 12x^2h + 12xh^2 + 4h^3 - 4x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 12x^2 - 12xh + 4h^2 \\ &= 12x^2 \end{aligned}$$

となる.

I. 次の式を（できれば微分の定義に従って）x について微分してみましょう.

(1) $f(x) = x^2$
(2) $f(x) = -3x2y$
(3) $f(x) = \frac{1}{3}x^5$



積・商の微分法

例. $f(x)=(x+3)(3x^2+2)$ を x について微分すると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+3)'(3x^2+2)+(x+3)(3x^2+2)' \\ &= 1\times(3x^2+2)+(x+3)\times 6x \\ &= 3x^2+2+6x^2+18x \\ &= 9x^2+18x+2 \end{aligned}$$

となる.

また,$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ を x について微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x)'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1\times(x^2+1)-x\times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

である.

I. 次の式を x に従って微分してみましょう.

(1) $f(x)=(x+1)(x^2+x+1)$
(2) $f(x)=(x^3+2x-1)(x^3-1)$
(3) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+x+1}$
(4) $f(x)=\frac{x^2}{(x+1)^2}$

合成関数の微分法

例. $f(x)=(x^2+3)^2$ を x について微分すると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\times(x^2+3)\times(x^2+3)' \\ &= (2x^2+6)\times 2x \\ &= 4x^3+12x \end{aligned}$$

となる.

I. 次の合成関数を x に従って微分してみましょう.

(1) $f(x)=(x+2)^3$
(2) $f(x)=(2x^2+2x-3)^2$

指数関数・対数関数の微分法

例. $f(x) = e^{2x}$ を x について微分すると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{2x})' \times (2x)' \\ &= 2e^{2x} \end{aligned}$$

となる. また, $f(x) = \log -100x$ を x について微分すると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\log(-100x))' \times (-100x)' \\ &= \frac{1}{-100x} \times -100 \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

となる.

I. 次の指数関数・対数関数を x に従って微分してみましょう.

(1) $f(x) = e^{3x}$
(2) $f(x) = \frac{1}{e^2}$
(3) $f(x) = \log -2x$
(4) $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$

最大値・最小値

例. $f(x) = x^2 + 7x - 10$ の最大値もしくは最小値をとる点は,

$$f'(x) = 2x + 7$$

で $f'(x) = 0$ とすると,

$$x = -\frac{7}{2}$$

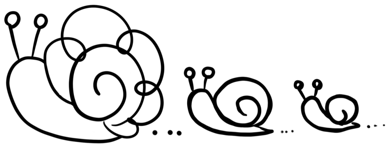
より,$x = \frac{7}{2}$ のとき最大値もしくは最小値をとる.

I. 次の関数の最大値もしくは最小値となる x の点を求めましょう.

- $f(x) = (x-1)^2$
- $f(x) = -2x^2 + 2x - 1$

2　積分

不定積分



例. $\int x^3 dx$ は

$$\int x^3 dx = \frac{1}{3+1} x^{3+1} \\ = \frac{1}{4} x^4 + C$$

となる（C は積分定数）.

I. 次の式を不定積分してみましょう.

- $\int x^2 - 1dx$
- $\int x^{\frac{1}{2}} dx$
- $\int -1dx$
- $\int \cos x dx$

定積分

例. $\int_1^3 x^3 dx$ は

$$\int_1^3 x^3 dx = [\frac{1}{4} x^4]_1^3 \\ = \frac{1}{4} 3^4 - \frac{1}{4} 1^4 \\ = 16$$

となる.

I. 次の式を定積分してみましょう.

- $\int_1^2 x^2 - 1dx$
- $\int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx$
- $\int_2^3 -1dx$

部分積分法

例. $\int x \sin x dx$ は

$$\int x \sin x dx = \int x(-\cos x)' dx \\ = x(-\cos x) - \int (x)' \times (-\cos x) dx \\ = -x \cos x + \int \cos x dx \\ = -x \cos x + \sin x + C$$

となる（C は積分定数）.

I. 次の式を部分積分を使って積分してみましょう．

- $\int x \cos x dx$

置換積分法

例. $\int (2x+1)^3 dx$ は $t = 2x+1$ とおくと

$$\frac{dt}{dx} = 2$$
$$dx = \frac{dt}{2}$$

より

$$\begin{aligned}\int (2x+1)^3 dx &= \int t^3 \frac{dt}{2} \\ &= \int \frac{t^3}{2} dt \\ &= \frac{1}{2 \times 4} t^4 \\ &= \frac{1}{8}(2x+1)^4 + C\end{aligned}$$

となる（C は積分定数）．

I. 次の式を部分積分を使って積分してみましょう．

- $\int (3x-2)^2 dx$